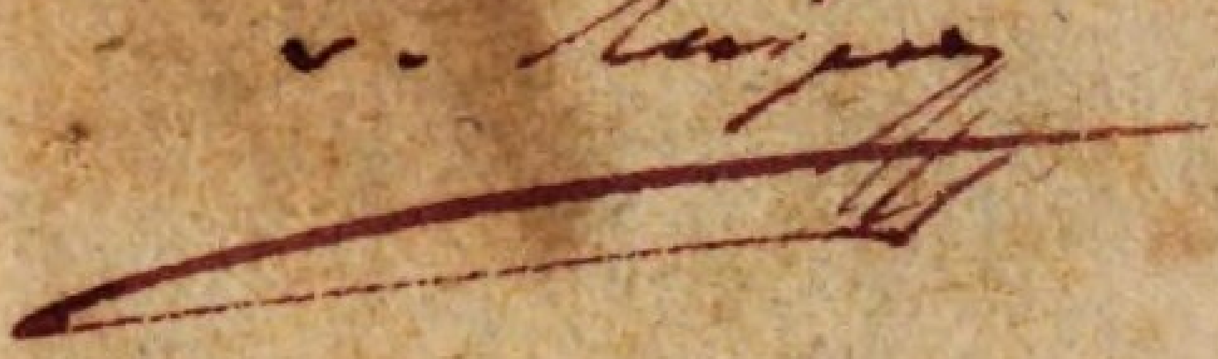
Cat. fol. 5 b. Nr. 83–86

Bild
582
-4-



Neues Elementarwerk
für
die niedern Klaſſen
lateiniſcher Schulen und Gymnaſien.

Nach einem zuſammenhängenden
und
auf die Leſung klaſſiſcher Autoren
in den obern Klaſſen,
wie auch
auf die übrigen Vorerkenntniſſe
künftiger Studirenden
gründlich vorbereitenden Plane.

Vierter Theil.
Mathematiſches Lerbuch
für die achte Klaſſe, oder den erſten Curſus.

Mit 7 Kupfertafeln.

Mit Churf. Sächſ. gnädigſter Freiheit.

Halle,
bei Johann Jacob Gebauer.
1780.

STADTBIBLIOTHEK AUGSBURG

Vorrede.

In dieſem vierten Theile des Elementarwerks ſind von den vier Rechnungsarten die Addition, Subtraction und Multiplication mit ihren Gründen vorgetragen.

Die Diviſion, nebſt der Lere von den Brüchen und den Anfangsgründen der Lere von den Proportionen, wird theoretiſch und praktiſch in dem zweiten mathematiſchen Curſus vorkommen.

Von der Geometrie iſt ungefer ſo viel, als das erſte Buch der Elemente des Euklides in ſich faſſet, beigebracht worden.

In den Beweiſen bin ich bisweilen den vortreflichen Vorleſungen des verewigten Segner gefolget.

Da auch in dem folgenden Theile der Nuzen der arithmetiſchen und geometriſchen Säze, ſo

bald es ſich der Folge der Beweiſe nach thun läßt, ſogleich durch die Anwendung auf mechaniſche und optiſche Säze, auch auf die Praxis der Geometrie und Perſpectiv gezeiget werden ſoll; ſo habe ich zum voraus einen Fingerzeig darauf geben wollen, indem ich von der Theorie des Hebels, ſo viel ſich hier erklären lies, one die Lere von den Proportionen vorauszuſezen, ſo deutlich als möglich zu machen geſucht.

Und da ich aus eigner Erfarung bei dem ehmals ſowol Kindern als erwachſnen Studirenden gegebnen mathematiſchen Unterrichte weiß, daß jenen die Buchſtabenrechenkunſt, da ſie noch von keinem Vorurtheile, als ob ſie unendlich ſchwer ſey, dagegen eingenommen ſind, weit leichter beizubringen iſt, als Erwachſnen, die, wenn ſie darinn verſäumt worden, von Furcht und Mistrauen befallen werden, ſobald ſie den Namen Buchſtabenrechenkunſt oder Algebra nur nennen hören; ſo habe ich auch hiezu, ſoviel die erſten drei Rechnungsarten betrift, den Grund zu legen, auch die Art, entgegengeſezte Gröſen zu addiren, zu ſubtrahiren und zu multipliciren, aufs faßlichſte zu erklären mich bemühet.

Ueber=

Ueberall habe ich bey den geometriſchen Säzen die Vorausſezungen oder hypotheſes, von den zu erweiſenden Säzen, deutlich unterſchieden; weil Anfänger oft beide mit einander verwechſeln.

Für künftige Studirende wär es übrigens nach meiner Einſicht und Beobachtung mer ſchädlich als nüzlich, ſie erſt blos blindlings durch eine arithmetiſche und geometriſche Praxis zu füren, ehe mann ihnen die Gründe erkläret. Für einen Handwerker mag das hinlänglich ſeyn; da aber Studirende hauptſächlich, wenn ſie auch nicht Mathematiker werden wollen, ihren Verſtand durch die reine Mathematik ſchärfen, und der Einbildungskraft dadurch einen Zaum anlegen ſollen, ſo geht mann Umwege, und hindert dieſe gute Abſicht ſelbſt, wenn mann rechnen, Figuren zeichnen, meſſen läßt, one ſogleich die Gründe davon anzugeben.

Es iſt allemal weit leichter, eine Praxis zu lernen und zu behalten, die auf eingeſehene Theorie ſich gründet, als ſie blos auf Vorſchriften eines andern, die mann als lauter poſitive Machtſprüche anſehn muß, zu erlernen und dem Gedächtniſſe einzuprägen.

Auch iſt bekannt genug, daß achtjährigen Kindern die reine Geometrie nicht zu ſchwer ſey, fals der Lerer nur langſam und ordentlich verfäret; noch ganz neuerlich hat der als Mathematiker, Philoſoph und Schriftſteller groſe Käſtner ein Exempel angefüret *).

Den Lerern kann nicht genug empfolen werden, die erſten Grundſätze, z. E. die von der Numeration, und in der Geometrie die Lerſätze von der Congruenz der Dreieke, äuſerſt langſam zu behandeln; und überhaupt, nicht eher weiter zu gehn, bis das vorhergehende vollkommen gefaßt worden, welches durch Fragen erforſcht werden muß; überhaupt aber bey jeder Gelegenheit die Wiederholung ſich angelegen ſein zu laſſen, wozu die Geometrie von ſelbſt bei jedem neuen Saze ausdrücklich auffodert.

*) Vorr. zu Hrn. Müllers Vorbereitung zur Geometrie.

Jena, den 25. Septemb.
1780.

C. G. Schütz.

I.

Numeriren bei Einern und Zehnern.

1.

Was eins, zwei, drei, vier, fünf, ſechs, ſieben, acht, neun ſind, wiſſen achtjärige Kinder ſchon. Mann kann dieſe Zalen mit Buchſtaben ausſchreiben, aber auch mit Ziffern:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Eins.	Zwei.	Drei.	Vier.	Fünf.	Sechs.	Sieben.	Acht.	Neun.

2.

Dieſe Zalen von Eins bis Neun nennt mann Einer; und wenn mann dieſe alſo mit Ziffern ſchreiben will, ſo kömmt mann mit den eben angefürten aus.

3.

Aber wenn ich nun Zehn, Zwanzig, Dreiſig, Vierzig, Funfzig, Sechzig, Siebzig, Achtzig, Neunzig, mit Ziffern ſchreiben ſoll? Dieſe Zalen heiſen **Zehner**. Was fang ich dann an? Soll ich ſie wieder ſo ſchreiben:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

ſo liest mir das jeder: Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun; aber nicht, wie ich haben wollte: Zehn, Zwanzig, Dreiſig, Vierzig, Funfzig, Sechzig, Siebenzig, Achtzig, Neunzig. Was iſt zu thun? Wir müſſen uns beſinnen.

4.

Wir könnten uns zwar leicht helfen, wenn wir neue Zeichen machen wollten. Wir könnten z. E. ſagen: wir wollen

Zehn	ſchreiben	א	Sechzig	ו
Zwanzig		ב	Siebenzig	ז
Dreiſig		ג	Achtzig	ח
Vierzig		ד	Neunzig	ט
Funfzig		ה		

Aber wenn dis nun nicht ſein ſoll, daß wir neue Zeichen machen ſollen: wenn wir uns durchaus mit den Ziffern

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

behelfen, und doch auch Zehn, Zwanzig, Dreiſig, Vierzig, Funfzig, Sechzig, Siebenzig, Achtzig, Neunzig ſchreiben ſollen, wie denn?

5.

Es wollte einer an ſeine Bücher, die er hatte, Numern kleben, damit er ſie gleich finden könnte. Nun hatte er viele Zettel, worauf 1, viele worauf 2, oder 3, oder 4, 5, 6, 7, oder 8, 9 ſtand. Wie er nun 9 Bücher mit Numern verſehn hatte, und an das zehnte kam, ſo wuſte er nicht, was er dieſem für eine Numer geben ſollte, denn ſie waren alle ſchon dageweſen. Endlich dachte er: ich will verſchiedene Reihen übereinander machen, und denn immer wieder von vorn anfangen; ſo daß in jede Reihe neun Bücher kommen. Er machte es alſo mit ſeinen Zetteln, die er an die Bücher klebte, folgender maſſen: Er machte neun Zettel, darauf ſchrieb er

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Erſte Reihe	E. R.	E. R.	E. R.	E. R.	E. R.	E. R.	E. R.	E. R.

hierauf fing er wieder von vorn an:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Zweite Reihe	zweite Reihe	zweite Reihe	zweite Reihe	zweite Reihe	zweite Reihe	zweite Reihe	zweite Reihe	zweite Reihe

und ſo konnte er mit ſeinen Ziffern ausreichen.

6.

So könnten wirs nun auch mit den Zehnern und Einern machen. Wollte ich z. E.

Zwei

Zwei ſchreiben, ſo ſchrieb ich:

2.
Erſte Reihe

wollte ich aber Zwanzig ſchreiben; ſo:

2.
Zweite Reihe

7.

Aber das iſt ſer weitläuftig. So thät ich ja klüger, ich ſchrieb Zwanzig mit Buchſtaben aus. Dafür ſchreiben wir aber mit Ziffern, damit wirs bequemer und kürzer haben wollen.

8.

Es war ein Mann, der hatte ein Geldſchränkchen, dieſes war ſo eingerichtet: In der erſten Reihe zur rechten Hand, waren neun Käſtchen übereinander, in dem unterſten lag ein harter Thaler, in dem nächſten drüber lagen zwei, in dem dritten drei, und ſo bis auf neun. Dann hatte er zur linken Hand noch ſo eine Reihe Käſtchen übereinander; da lag in dem unterſten ein goldnes Zehnthalerſtük, in dem nächſten drüber zwei, in dem dritten drei, und ſo fort bis auf neun. Das ſah nun ſo aus.

9	9
8	8
7	7
6	6
5	5
4	4
3	3
2	2
1	1

Wollte er nun jemanden anzeigen: er hätte für etwas drei Zehnthalerſtüken und fünf einzelne Thaler bezalet, ſo zog er die beiden Käſtchen mit No. 3. und No. 5. heraus, und ſtellte ſie ſo neben einander hin:

3	5

Dis mußte mann ſo leſen drei Zehnthalerſtüken und fünf einzelne Thaler.

Eben ſo hieſen

6	8	ſechs Zehnthalerſtüken, und acht einzelne Thaler.
7	4	ſieben Zehnthalerſtüken und vier einzelne Thaler.
9	3	neun Zehnthalerſtüken und drei einzelne Thaler.

9.

Weil aber die Redensart ſieben Zehnthalerſtüken ſo weitläufig war auszuſprechen, ſo dachte der Mann mit dem Geldſchränkchen ſo:

Ein Zehnthalerſtük	macht ja	zehn Thaler
Zwei Zehnthalerſtüke	„ „	zwanzig Thaler
Drei Zehnthalerſtüke	„ „	dreiſig Thaler

und ſo fort bis auf neunzig Thaler. Alſo ſprach er künftig, wenn er

die Käſtchen	6	8	zuſammenſezte: Sechzig acht oder acht und Sechzig Thaler
Eben ſo:	7	4	las er: Siebzig vier, oder vier und ſiebenzig Thaler
Eben ſo:	9	3	las er: Neunzig drei, oder drei und neunzig Thaler.

10.

Wenn nun der Mann mit ſeinem Verwalter etwas zu rechnen hatte, ſo brauchte er immer die Geldkäſtchen, und ſezte ſie ſo neben einander wie ers nötig hatte. Einmal wußte er ſich doch nicht gleich zu helfen. Er wollte ſeinem Verwalter anzeigen, daß er für ein Pferd funfzig Thaler oder fünf Zehnthalerſtüke bezalen ſollte, und ſezte alſo das Käſtchen aus der zweiten Reihe mit No. 5. bezeichnet vor ihn hin; auf dieſe Weiſe:

5

Der Verwalter ſagte: ich weis nicht recht, ob dis fünf Thaler, oder fünf Zehnthalerſtüke, das heiſt, funfzig Thaler heiſen ſoll. Ich kann ja nicht ſehn, ob das Käſtchen aus der zweiten oder erſten Reihe iſt. Gut, ſagte jener, ich will dirs deutlicher machen, und ſezte alſo das Käſtchen aus der erſten Reihe mit No. 5. bezeichnet, daneben. Dis ſah nun ſo aus:

5	5

Ja nun verſteh ich Sie, ſagte der Verwalter: ich ſoll für das Pferd fünf Zehnthalerſtüken und 5 einzelne Thaler geben. Nein, ſo mein ichs nicht, ſagte jener, nur fünf Zehnthalerſtüke, und nicht noch fünf einzelne Thaler. Damit du es aber künftig verſtehſt, ſo will ich in dieſem Falle das Käſtchen zur rechten Hand umkeren, daß du keine Numer ſiehſt, und will ſie ſo ſezen

5	

das heiſt denn 5 Zehnthalerſtüke oder funfzig Thaler und nichts mer dazu. Eben ſo heiſt:

9	

neunzig Thaler; will ich aber neun Thaler anzeigen, ſo neme ich nur ein Käſtchen mit 9 bezeichnet; ſo:

[9]

Und auf dieſe Weiſe pflegte der Herr mit den Geldſchränkchen, ſeinem Verwalter die Zalen anzudeuten, ſo lange er bei ihm war.

11.

Als aber der Verwalter auf ein andres Gut ſeines Herrn reiſen mußte; da gabs viel Briefe hin und her zu ſchreiben; und da wurden ſie mit einander eins, weil ſie nun doch die Käſtchen nicht brauchen konnten, ſo wollten ſie ſie, wenn ſie Zalen zu ſchreiben hätten, in den Briefen an einander abmalen, ſo gut wie ſie konnten. Demnach ſchrieb der Herr an ſeinen Verwalter einſtmals folgendergeſtalt.

Hiedurch will ich Ihn anweiſen, mein lieber Verwalter, die Kälber das Stük zu [2] Thaler zu verkaufen. Wenn Er für den alten Braunen [4] [5] Thaler bekommen, kann, ſo geb Er ihn immer hin. Kann Er mir einen Spann gute Kutſchpferde verſchaffen, ſo geb ich Ihm den Auftrag für eins [7] [ ] oder [8] [ ] Thaler höchſtens zu geben.

12.

Der Verwalter war ein anſchlägiſcher Kopf, und ſuchte ſichs, wo er konnte, bequem zu machen. Er war einmal in einer lateiniſchen Schule geweſen, und hatte das Sprüchelchen gelernt: Quod fieri poteſt per pauca, non debet fieri per plura. Er dachte alſo, man könnte ja die Einfaſſung um die Zalen, die das Käſtchen vorſtellen ſollte, ganz füglich weglaſſen; und wenn mann fünf und vierzig Thaler ſchreiben wollte, ſo dürfte man ja nur 45 Thaler ſchreiben, und hätte nicht nötig [4] [5] Thaler hinzumalen.

Er

Er antwortete alſo ſeinem Herrn wie folget:

Gnädiger Herr! Ich habe 15 Kälber das Stük zu 2 Thaler verkauft, das macht zuſammen 3□ Thaler. Den Braunen hab ich nach Ihrem Befel für 45 Rthlr. hingegeben. Vier ſchöne Kutſchpferde hab' ich auch erhandelt, und weil Sie meinten ich könnte bis auf 7□ oder 8□ Thaler gehn, ſo denk' ich es wird Ihnen ganz recht ſein, das ich das Stük mit 75 Rthlr. bezalet habe.

Statt des Zeichens □ machte er nachher ein rundes O, welches er eine Null nennte; und wenn er nun künftig ſchreiben wollte:

Zwei Zehnthalerſtüken
oder zwanzig Thaler, ſo ſchrieb er 20 Rthlr.
eben ſo dreiſig Thaler 30 Rthlr.
vierzig Thaler 40 Rthlr.
funfzig Thaler 50 Rthlr.
ſechzig Thaler 60 Rthlr.
ſiebzig Thaler 70 Rthlr.
achtzig Thaler 80 Rthlr.
neunzig Thaler 90 Rthlr.

13.

Wenn alſo die Ziffern 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. zur rechten Hand allein, oder auf der erſten Stelle ſtehn, ſo bedeuten ſie **Einer**; ſtehn ſie aber auf der zweiten Stelle nach der linken Hand zu, ſo bedeuten ſie **Zehner**. So heiſt

11. ein Zehner und ein Einer: d. i. elf.
12. ein Zehner und zwei Einer: d. i. zwölf.
13. ein Zehner und drei Einer: d. i. dreizehn u. ſ. w.
20. heiſt zwei Zehner und kein Einer: d. i. zwanzig.
21. heiſt zwei Zehner und ein Einer: d. i. Ein und zwanzig u. ſ. w.
13. heiſt dreizehn, aber 31 heiſt ein und dreiſig.
14. heiſt vierzehn, aber 41 heiſt ein und vierzig, oder welches einerlei iſt

13. heiſt zehn und drei; aber 31 heiſt dreimalzehn und eins oder dreiſig und eins.

14. heiſt zehn und vier; aber 41 heiſt viermal zehn und eins, oder vierzig und eins, u. ſ. w.

14.

Mann lerne alſo folgende Zalen richtig ſchreiben.

Eins	Elf	Ein und zwanzig
Zwei	Zwölf	Zwei u. zwanzig
Drei	Dreizehn	Drei u. zwanzig
Vier	Vierzehn	Vier u. zwanzig
Fünf	Funfzehn	Fünf u. zwanzig
Sechs	Sechzehn	Sechs u. zwanzig
Sieben	Siebzehn	Sieben u. zwanzig
Acht	Achtzehn	Acht u. zwanzig
Neun	Neunzehn	Neun u. zwanzig
Zehn	Zwanzig	Dreiſig
* *	* *	* *
Ein und dreiſig	Ein und vierzig	Ein und funfzig
Zwei u. dreiſig	Zwei u. vierzig	Zwei u. funfzig
Drei u. dreiſig	Drei u. vierzig	Drei u. funfzig
Vier u. dreiſig	Vier u. vierzig	Vier u. funfzig
Fünf u. dreiſig	Fünf u. vierzig	Fünf u. funfzig
Sechs u. dreiſig	Sechs u. vierzig	Sechs u. funfzig
Sieben u. dreiſig	Sieben u. vierzig	Sieben u. funfzig
Acht u. dreiſig	Acht u. vierzig	Acht u. funfzig
Neun u. dreiſig	Neun u. vierzig	Neun u. funfzig
Vierzig	Funfzig	Sechzig
* *	* *	* *
Ein und ſechzig	Ein und ſiebzig	Ein und achtzig
Zwei u. ſechzig	Zwei u. ſiebzig	Zwei u. achtzig
Drei u. ſechzig	Drei u. ſiebzig	Drei u. achtzig
Vier u. ſechzig	Vier u. ſiebzig	Vier u. achtzig
Fünf u. ſechzig	Fünf u. ſiebzig	Fünf u. achtzig

Sechs

Sechs u. ſechzig
Sieben u. ſechzig
Acht u. ſechzig
Neun u. ſechzig
Siebzig

Sechs u. ſiebzig
Sieben u. ſiebzig
Acht u. ſiebzig
Neun u. ſiebzig
Achtzig

Sechs u. achtzig
Sieben u. achtzig
Acht u. achtzig
Neun u. achtzig
Neunzig

* *

Ein und neunzig
Zwei und neunzig
Drei und neunzig
Vier und neunzig
Fünf und neunzig
Sechs und neunzig
Sieben und neunzig
Acht und neunzig
Neun und neunzig

15.

Desgleichen lerne mann folgende Ziffern richtig ausſprechen.

1.	10.	11.	12.	21.	23.	32.	34.	43.
2.	20.	22.	13.	31.	24.	42.	35.	53.
3.	30.	33.	14.	41.	25.	52.	36.	63.
4.	40.	44.	15.	51.	26.	62.	37.	73.
5.	50.	55.	16.	61.	27.	72.	38.	83.
6.	60.	66.	17.	71.	28.	82.	39.	93.
7.	70.	77.	18.	81.	29.	92.		
8.	80.	88.	19.	91.				
9.	90.	99.						

45.	54.	56.	65.	67.	76.	78.	87.	89.	98.
46.	64.	57.	75.	68.	86.	79.	97.		
47.	74.	58.	85.	69.	96.				
48.	84.	59.	95.						
49.	94.								

16.

Wenn in der erſten Stelle der Ziffern zur rechten Hand o oder Null ſteht, ſo wird dadurch angezeigt, daß kein Einer da ſei.

Z. E. 50 heiſt ſo viel als fünf Zehner, und kein Einer, oder funfzig ſchlechtweg.

17.

Eine Ziffer, die in der zweiten Stelle, von der rechten Hand an gerechnet, ſteht, bedeutet allezeit zehnmal ſo viel, als ſie bedeuten würde, wenn ſie auf der erſten Stelle ſtünde.

Z. E. 5 Aepfel, ſind fünf Aepfel.
50 Aepfel aber zehnmal fünf, d. i. funfzig Aepfel.

18.

Aufgabe zur Beluſtigung.

Unter funfzehn Zalen, deren drei und drei neben einander, (alſo in fünf Zeilen) und fünf übereinander, (alſo in drei Columnen) geſtellt werden, diejenige zu erraten, die ein andrer in den Sinn genommen.

Auflöſung.

Man ſeze, die Zalen ſein folgende:

No. I.	84.	93.	14.
	32.	41.	15.
	16.	12.	18.
	24.	50.	64.
	72.	88.	10.

Mann frägt den andern, in welcher Columne die Zal liege, die er in den Sinn genommen. Geſezt, er antworte: in der erſten; ſo ſtellt mann nun die Zalen ſo, daß mann bei der zweiten Columne unten anfange, und die aufeinanderfolgenden Zalen in die Quer ſtelle, ſo daß mann hierauf zur erſten, und denn zur lezten Columne von unten hinauf fortgeht. So werden die Zalen nunmer ſo ſtehn:

No. II.

No. II.	88.	50.	12.
	41.	93.	72.
	24.	16.	32.
	84.	14.	15.
	18.	64.	10.

Nun frägt mann wieder, in welcher Columne die Zal ſtehe. Iſt die Antwort, in der dritten; ſo fängt man wieder bei der nächſten d. i. zweiten Columne an in die Quere zu ſtellen, ſo daß mann zur dritten und denn zur erſten von unten hinauf fortgehe; alsdenn ſtehen die Numern ſo:

No. III.	64.	14.	16.
	93.	50.	10.
	15.	32.	72.
	12.	18.	84.
	24.	41.	88.

Nun frägt mann noch einmal, in welcher Columne die Zal ſtehe. Heiſt es wieder: in der dritten; ſo fängt mann wieder bei der nächſten d. i. zweiten Columne an zu ſtellen, geht dann zur dritten und denn zur erſten von unten hinauf. Alsdenn ſtehn die Zalen ſo:

No. IV.	41.	18.	32.
	50.	14.	88.
	84.	72.	10.
	16.	24.	12.
	15.	93.	64.

Bei abermaliger Frage wird geantwortet: in der mittlern Columne; ſo nenne mann die mittelſte Zal darinn, nemlich 72. Dis muß diejenige ſein, welche der andre in den Sinn genommen.

Ein anderes Beiſpiel.

No. I.	No. II.	No. III.	No. IV.
84. 93. 14.	72. 24. 16.	12. 14. 64.	18. 16. 50.
32. 41. 15.	32. 84. 10.	32. 72. 93.	32. 12. 24.
16. 12. 18.	64. 18. 15.	50. 15. 10.	88. 10. 93.
24. 50. 64.	14. 88. 50.	16. 41. 88.	64. 84. 41.
72. 88. 10.	12. 41. 93.	18. 84. 24.	15. 72. 14.

Die Zalen ſtehn wie bei No. I. Ein andrer nimmt ſich die Zal 10 in Sinn, und ſagt, die Zal ſei in der dritten Columne; ich ſeze die Zalen wie bei No. II. und frage wieder, wo die Zal ſtehe. Antw. In der dritten. Darauf ſeze ich die Zalen wie

bei

bei No. III. Die Antwort iſt wieder, in der dritten; hierauf ſtelle ich die Zalen wie bei No. IV. und da hier die Antwort iſt, in der mittelſten, ſo neme ich die mittlere in dieſer Columne, nemlich 10, welches die Zal war, die der andre in Sinn genommen.

19.

Eine änliche Aufgabe.

Unter ſechzehn aufgeſchriebnen Zalen diejenige zu erraten, welche ein andrer in den Sinn genommen.

Auflöſung.

I.		II.		III.		IV.	
1.	11.	11.	55.	55.	77.	77.	88.
2.	22.	1.	5.	11.	33.	55.	66.
3.	33.	22.	66.	5.	7.	33.	44.
4.	44.	2.	6.	1.	3.	11.	22.
5.	55.	33.	77.	66.	88.	7.	8.
6.	66.	3.	7.	22.	44.	5.	6.
7.	77.	44.	88.	6.	8.	3.	4.
8.	88.	4.	8.	2.	4.	1.	2.

Die Zalen ſind geſtellt wie bei No. I. Der andre wält ſich eine Zal, und ſagt, ſie ſteht in der erſten Reihe. Ich fange alſo bei der erſten Reihe unten an, und ſtelle die Zeilen 8 und 88 in die 2te Columne von unten auf, und ſo fort wie bei No. II. Alsdann, wenn der andre wieder ſagt, die Zal ſtehe in der erſten Reihe, ſtellt mann die Zalen nach eben der Regel wie bei No. III. Sagt er wieder, die Zal ſtehe in der erſten Reihe, ſo ſtelle ich ſie wieder wie bei No. IV. Nun wird geantwortet, die Zal ſtehe in der erſten Columne; ich neme alſo die unterſte, nemlich 1. Dieſes muß die Zal ſein, welche der andre in den Sinn genommen.

II.

Addiren mit Einern und Zehnern.

20.

Wenn mann verſchiedene Dinge zuſammenzälen will, ſo muß mann ſie unter einerlei Gattung, oder unter einerlei Namen bringen.

Z. E.

Z. E. drei Knaben und zwei Mädchen kann ich nicht anders zuſammenrechnen, und fünf nennen, als wenn ich ſie unter dem gemeinſchaftlichen Namen der Kinder begreife; ich kann ſagen drei Knaben und zwei Mädchen ſind fünf Kinder; aber weder fünf Knaben, noch fünf Mädchen.

Vier Pferde und drei Eſel kann ich zuſammen weder ſieben Pferde noch ſieben Eſel nennen. Bringe ich ſie aber unter die gemeinſame Gattung der Thiere, ſo kann ich ſagen: vier Pferde und drei Eſel ſind ſieben Thiere.

21.

Es iſt nöthig, wenn mann geſchwind zuſammenzälen will, aus dem Kopfe zu wiſſen, wie viel zwei Einer zuſammen betragen.

Daher lerne mann folgende Tafel auswendig.

Eins und eins iſt zwei	1 + 1 = 2
Zwei und eins iſt drei	2 + 1 = 3
Zwei und zwei iſt vier	2 + 2 = 4
Zwei und drei iſt fünf	2 + 3 = 5
Zwei und vier iſt ſechs	2 + 4 = 6
Zwei und fünf iſt ſieben	2 + 5 = 7
Zwei und ſechs iſt acht	2 + 6 = 8
Zwei und ſieben iſt neun	2 + 7 = 9
Zwei und acht iſt zehn	2 + 8 = 10
Zwei und neun iſt elf	2 + 9 = 11

Drei und drei iſt ſechs	3 + 3 = 6
Drei und vier iſt ſieben	3 + 4 = 7
Drei und fünf iſt acht	3 + 5 = 8
Drei und ſechs iſt neun	3 + 6 = 9

Drei und ſieben iſt zehn	3 + 7 = 10
Drei und acht iſt elf	3 + 8 = 11
Drei und neun iſt zwölf	3 + 9 = 12

Vier und vier iſt acht	4 + 4 = 8
Vier und fünf iſt neun	4 + 5 = 9
Vier und ſechs iſt zehn	4 + 6 = 10
Vier und ſieben iſt elf	4 + 7 = 11
Vier und acht iſt zwölf	4 + 8 = 12
Vier und neun iſt dreizehn	4 + 9 = 13

Fünf und fünf iſt zehn	5 + 5 = 10
Fünf und ſechs iſt elf	5 + 6 = 11
Fünf und ſieben iſt zwölf	5 + 7 = 12
Fünf und acht iſt dreizehn	5 + 8 = 13
Fünf und neun iſt vierzehn	5 + 9 = 14

Sechs und ſechs iſt zwölf	6 + 6 = 12
Sechs und ſieben iſt dreizehn	6 + 7 = 13
Sechs und acht iſt vierzehn	6 + 8 = 14
Sechs und neun iſt funfzehn	6 + 9 = 15

Sieben zu ſieben iſt vierzehn	7 + 7 = 14
Sieben zu acht iſt funfzehn	7 + 8 = 15
Sieben zu neun iſt ſechzehn	7 + 9 = 16

Acht zu acht iſt ſechzehn	8 + 8 = 16
Acht zu neun iſt ſiebzehn	8 + 9 = 17

Neun zu neun iſt achtzehn	9 + 9 = 18

* * *

Hat mann dieſe Tafel in obiger Ordnung dem Gedächtniſſe eingeprägt, ſo wird mann wol thun, wenn mann ſie auch nach folgender Ordnung auswendig lernt.

1 + 1 = 2	2 + 2 = 4	2 + 3 = 5
2 + 1 = 3	3 + 2 = 5	3 + 3 = 6
3 + 1 = 4	4 + 2 = 6	4 + 3 = 7
4 + 1 = 5	5 + 2 = 7	5 + 3 = 8
5 + 1 = 6	6 + 2 = 8	6 + 3 = 9
6 + 1 = 7	7 + 2 = 9	7 + 3 = 10
7 + 1 = 8	8 + 2 = 10	8 + 3 = 11
8 + 1 = 9	9 = 2 = 11	9 + 3 = 12

2 + 4 = 6	2 + 5 = 7	2 + 6 = 8
3 + 4 = 7	3 + 5 = 8	3 + 6 = 9
4 + 4 = 8	4 + 5 = 9	4 + 6 = 10
5 + 4 = 9	5 + 5 = 10	5 + 6 = 11
6 + 4 = 10	6 + 5 = 11	6 + 6 = 12
7 + 4 = 11	7 + 5 = 12	7 + 6 = 13
8 + 4 = 12	8 + 5 = 13	8 + 6 = 14
9 + 4 = 13	9 + 5 = 14	9 + 6 = 15

2 + 7 = 9	2 + 8 = 10	2 + 9 = 11
3 + 7 = 10	3 + 8 = 11	3 + 9 = 12
4 + 7 = 11	4 + 8 = 12	4 + 9 = 13
5 + 7 = 12	5 + 8 = 13	5 + 9 = 14
6 + 7 = 13	6 + 8 = 14	6 + 9 = 15
7 + 7 = 14	7 + 8 = 15	7 + 9 = 16
8 + 7 = 15	8 + 8 = 16	8 + 9 = 17
9 + 7 = 16	9 + 8 = 17	9 + 9 = 18

22. Wer

22.

Wer ſich recht überzeugen will, daß alles in dieſen Tafeln richtig iſt, der darf ſich nur die Müche geben und an den Fingern nachzälen.

23.

Wenn mann nun Einer und Einer zuſammenzälen ſoll, ſo kann mann damit, wenn mann obige Tabelle wol inne hat, im Kopfe fertig werden, one dabei zu ſchreiben. Z. E. 8 und 9 iſt 17.

Wollte ich aber doch dabei ſchreiben, ſo würde ich die beiden Zalen 8 und 9 übereinander ſezen, einen Strich darunter machen, und die Zal 17 darunter ſchreiben

$$\begin{array}{r} 8 \\ 9 \\ \hline 17 \end{array}$$

Der Strich wird deswegen gemacht, damit mann die Zal, welche ich herausgefunden habe, indem ich 8 und 9 zuſammengerechnet, von jenen deſto beſſer unterſcheiden könne.

24.

Die Zal, welche herauskömmt, wenn mann merere Zalen zuſammenrechnet, heiſt die Summe; die Zalen aber, welche zuſammengerechnet werden, heiſen die ſummirenden Zalen.

Alſo iſt im vorigen Exempel 17 die Summe, und die Zalen 8 und 9 ſind ſummirende Zalen.

25.

Wenn mann nun aber Zehner und Zehner, oder Zehner und Einer zuſammenrechnen, oder in eine Summe bringen ſoll, wie fängt mann das an?

Ich

Ich ſoll z. E. 27 und 6 zuſammenrechnen. Werde ich nun das wol recht machen, wenn ich ſo ſchreibe

27
6
———
87

und ſage: ſieben iſt ſieben; ſechs und zwei iſt acht; alſo machen 27 und 6 gerade 87? Daß dis unmöglich recht ſein kann, ſehe ich ſogleich, wenn ich zu 27 noch 6 an den Fingern fortzäle: denn ſo zäle ich 28, 29, 30, 31, 32, 33. Alſo offenbar macht 27 und 6 nur 33; nicht aber 87.

Warum iſt aber jenes nicht recht? Wo ſtekt der Feler?

Antwort: Wenn ich 27 und 6 zuſammenzälen ſoll, ſo ſoll ich 2 Zehner, hiernächſt 7 und 6 Einer zuſammenzälen. 2 Zehner und 6 Einer machen ja nicht 8 Zehner, ſo wenig als 2 Pferde und 6 Eſel acht Pferde ausmachen. (§. 20.) Ich muß alſo die 7 und 6 Einer zuſammenzälen, und alſo das Exempel ſo ſtellen:

27
 6
———

denn ſo kommen die 7 und 6 Einer untereinander zu ſtehn, und die 2 Zehner bleiben für ſich.

Nun ſage ich, 7 und 6 macht 13; das heiſt, 3 Einer und 1 Zehner; ich ſchreibe alſo blos die 3 Einer unter die erſte Stelle rechter Hand, und behalte den 1 Zehner im Sinne: folgendergeſtalt:

27
 6
———
 3

Nun nehme ich den 1 Zehner im Sinn, und die obenſtehenden 2 Zehner zuſammen; ſage, 2 und 1 macht 3. Dieſe 3 ſchreibe ich unter den Strich, ſo iſt das ganze Exempel fertig, und ſieht nunmer ſo aus:

27
6
33

Alſo iſt 33 die Summe von den ſummirenden Zalen 27 und 6.

26.

Ein andres Beiſpiel:

	3
	6
	7
1	1
	9
	5
1	4
	6
	8
1	5
	3
	8

Nachdem ſo wie hier Einer unter Einer, und Zehner unter Zehner geſtellt worden, ſo ſage ich: 8 zu 3 iſt 11; 11 zu 5 iſt 16; 16 zu 8 iſt 24; 24 zu 6 iſt 30; 30 zu 4 iſt 34; 34 zu 5 iſt 39; 39 zu 9 iſt 48; und 1 dazu iſt 49; 49 und 7 iſt 56; 56 und 6 iſt 62, und 3 dazu iſt 65. — Weil nun 65 aus 6 Zehnern und 5 Einern beſteht, ſo ſchreibe ich blos die 5 Einer unter die

erſte

erſte Stelle; und behalte die 6 Zehner im Sinn; gehe nun zur zweiten Reihe fort, und ſage 6 (im Sinn) und 1 iſt 7, und 1 iſt 8, und 1 iſt 9. Das ſind 9 Zehner; dieſe ſchreibe ich unter, ſo bekomme ich die Summe

95.

27.

Wenn mann geſchwind rechnen lernen will, ſo iſt nötig zu wiſſen:

Gleichwie 8 zu 7 gerade 15 macht, wo in der erſten Stelle 5 ſteht; ſo muß 8 zu 17 gerade 25 machen; 8 zu 27 aber 35; 8 zu 37 hingegen 45; ſo daß immer 5 in der lezten Stelle zu ſtehn komme; wie mann aus dieſer Ordnung ſieht:

8	8	8	8	8	8	8	8	8
7	17	27	37	47	57	67	77	87
15	25	35	45	55	65	75	85	95

Wenn ich alſo nur aus der Tabelle weiß, 8 und 7 macht 15; das iſt 1 Zehner und 5 Einer; ſo weiß ich auch gleich, wie viel 8 und 37 macht, denn hier müſſen auch aus 8 und 7 fünf Einer und 1 Zehner kommen; den einen Zehner im Sinn, und die 3 Zehner machen 4 Zehner; folglich zuſammen 4 Zehner 5 Einer, das iſt:

45

Eben ſo geht es in änlichen Fällen; weil 6 zu 8 ſo viel als 14 ſind, ſo ſind 6 zu 18 = 24; und 6 zu 28 = 34: nach dieſer Ordnung:

6	6	6	6	6	6	6	6	6
8	18	28	38	48	58	68	78	88
14	24	34	44	54	64	74	84	94

28.

Wenn man ſich dieſen Vortheil merkt, ſo braucht mann nicht an den Fingern zu zälen, wenn mann rechnet; falls mann nur jene Tabelle wol inne hat. So ſagt mann in dem vorhergehenden Exempel:

3
6
7
1 1
9
5
1 4
6
8
1 5
3
8

Acht und drei iſt 11; 11 und 5 (weil 1 und 5 ſechs macht, ſo macht 11 und 5) 16. Ferner 16 und 8 (weil 6 und 8 vierzehn macht, ſo macht 16 und 8) 24. Ferner 24 und 6 (weil 4 und 6 zehn macht, ſo macht 24 und 6) 30. Ferner 30 und 4 iſt 34. Ferner 34 und 5 iſt 39. Ferner 39 und 9 (weil neun zu neun 18 macht, ſo macht 39 und 9) 48 und ſo weiter.

Wenn mann nun auf dieſe Weiſe recht viel Exempel hübſch langſam und bedächtig rechnet, ſo geht es endlich viel geſchwinder, ſo geſchwind daß es eine Luſt iſt. Hat mann alsdenn voriges Exempel zu rechnen, ſo ſagt mann blos:

acht, elf, ſechzehn, vier und zwanzig, 30, 34, 39, 48, 49, 56, 62, 65; ſchreibt die lezte 5 unter, nimmt die

die 6 der Zehner zur folgenden Reihe, und ſagt 6 und 3 iſt 9. Alsdenn iſt mann fertig und hat die Summe 95 herausgebracht.

29.

Es iſt aber wol zu merken, daß mann im Anfange ſich nicht übereilen, ſondern alles ſer langſam rechnen muß, wie vorher beſchrieben worden. Wer gleich anfangs geſchwind ſprechen will, lernt ſtottern, nicht ordentlich reden; wer gleich im Anfange geſchwind ſchreiben will, lernt nur ſchmattern, aber nicht ſchön ſchreiben; wer gleich anfangs das Clavier geſchwind ſpielen will, der lernt nur klimpern und ſtümpern, wird aber niemals ein guter Spieler. Alſo wer im Anfange ſich gleich mit dem Rechnen übereilt, der lernt niemals richtig und ſicher rechnen; was hat mann nun aber davon, wenn mann nicht ſicher rechnet, oder wenigſtens ſeiner Sachen nicht gewiß iſt?

Ein Vater gab ſeinen zwei Sönen folgende Zalen auf:

6
8
7
5
4
3
9
6
7
9

---

und ſagte dabei: wer von euch am erſten die richtige Summe herausbringt, der ſoll ſo viel Pfennige haben,

als die Summe ausmacht. Der älteſte war geſchwind drüber her, dachte es käme nur auf die Geſchwindigkeit an; ſagte 9 zu 7 iſt 15, ſind 21 und 9 ſind 30, ſind 33, ſind 38, ſind 43, und 7 ſind 50, und 8 ſind 58, und 6 ſind 64.

Falſch, ſchrie der Vater! Er dachte, ich wills doch noch wol einmal rechnen, ehe mein Bruder fertig wird. Das zweitemal brachte er 61 heraus, darauf ſagte ſein Bruder, der ſich Zeit dazu genommen hatte, die richtige Summe, und gewann die Pfennige.

30.

Die Summe iſt allemal den ſummirenden Zalen zuſammengenommen gleich.

31.

Die Summe iſt das Ganze, und die ſummirenden Zalen ſind die Theile, aus denen die Summe beſteht.

32.

Wenn mann, wie bisher gezeigt worden, Zalen zuſammenzält, und die Summe derſelben herausbringt, ſo heiſt das Addiren; und die Rechnungsart ſelbſt heiſt die Addition.

Oder: Addiren heiſt eine Zal finden, die merern gegebnen zuſammengenommen gleich iſt.

Oder: Addiren heiſt die Summe mererer Zalen finden.

Oder: Addiren heiſt finden, wie viel merere Zalen zuſammen betragen, wenn mann ſie zuſammenzälet.

33. Bei=

33.

Beiſpiele zur Uebung im Addiren mit Einern und Zehnern.

1) Von Berlin bis Frankfurt an der Oder ſind 10 Meilen, von Frankfurt bis Croſſen 6 M. von da bis Breslau 24 M. von da bis Ollmütz 12 Meilen; von da bis Brünn 8 M. von da bis Wien 16 Meilen.

Summe von Berlin bis Wien?

2) Von Berlin bis Potsdam 4 Meilen; von da bis Brandenburg 4 M. von da bis Magdeburg 10 Meilen, von Magdeburg bis Halberſtadt 6 M. von da bis Herford 22 M. von da bis Lippſtadt 6 M. von da bis Weſel 16 M. von da bis Cleve 4 M.

Summe von Berlin bis Cleve?

3) Von Berlin bis Stargard 21 M. von da bis Danzig 39 M. von da bis Königsberg in Preußen 24 Meilen; von da bis Inſterburg 12; von da bis Tilſit 8 M. von da bis Memel 14 M.

Summe von Berlin bis Memel?

4)

Von Berlin bis Treuenbriezen			8	Meilen
Treuenbriezen bis Leipzig			12	〃
Leipzig	〃	Naumburg	6	〃
Naumburg	〃	Erfurt	7	〃
Erfurt	〃	Eiſenach	7	〃
Eiſenach	〃	Hanau	18	〃
Hanau	〃	Frankfurt am M.	2	〃
Frankfurt	〃	Bruchſal	16	〃
Bruchſal	〃	Carlsruh	3	〃
Carlsruh	〃	Baſel	24	〃

Summe von Berlin bis Baſel?

5) Als Hr. Prof. Sulzer von Berlin nach Nizza reiſete, bezahlete er

dem Fuhrmann von Berlin bis Leipzig	7	alte Louisd'or
dem von Leipzig bis Frankfurt	6	⸗
von Frankfurt bis Baſel etwas über	9	⸗
von Baſel nach Bern etwas unter	2	⸗
von Bern nach Lauſanne	$2\frac{1}{2}$	⸗
von Lauſanne nach Genthod bei Genf	$1\frac{1}{2}$	⸗
von Genthod nach Lyon	3	⸗
von Lyon nach Marſeille etwas unter	3	⸗
von Marſeille bis Toulon (vermuthlich)	2	⸗
von Toulon nach Nizza	4	⸗

Summe der Fuhrkoſten von Berlin bis Nizza?

6) Von Halle nach Naumburg ſind 5 Meilen, von da bis Jena 3 Meilen, von da bis Saalfeld 5 Meilen, von da bis Coburg 8 Meilen, von da bis Erlangen 12 Meilen, von da bis Nürnberg 4 Meilen, von da bis Augſpurg 20 Meilen.

Summe der Meilen von Halle bis Augſpurg?

34.

Wenn mann Thaler, Groſchen und Pfennige zuſammen addiren ſoll, ſo muß mann vorerſt wiſſen, daß ein Thaler 24 Groſchen, und 1 Groſchen 12 Pfennige enthält. Alsdenn ſezt mann Thaler unter Thaler, Groſchen unter Groſchen, Pfennige unter Pfennige. Denn mann kann nur ſolche Dinge zuſammenzälen, die zu einerlei Art gehören, oder einerlei Namen füren. §. 20. Hiernächſt fängt mann bei den Pfennigen an, und ſo oft mann 12 Pfennige hat, merkt mann bei den Groſchen 1 an; die zulezt übrig bleibenden Pfennige ſezt mann als Sum-

Summe unter die Pfennige. Mann geht ſo dann zu den Groſchen über, rechnet ſie mit den aus den Pfennigen angemerkten zuſammen, und ſo oft mann 24 Groſchen gezälet, merkt mann in der Reihe der Thaler 1 an; und ſezt die am Ende überſchieſende Zal der Groſchen als Summe unter die Groſchen. Endlich zälet mann auch die Thaler, mit den aus den Groſchen erwachsnen Thalern zuſammen, und ſchreibt die Summe an gehörigem Orte unter.

Rthlr.	Ggr.	Pf.
6	2	4
3	5	7
2	8	1
—	22	4
—	20	—
1	2	7
—	12	11
—	15	8
...	...	
15 Rthlr.	17 Ggr.	6 Pf.

35.

Zur Geſchwindigkeit bei dieſer Rechnung iſt ſer beförderlich, ſich folgende Säze zu merken.

A.

12 Pfennige	machen	1 Groſchen			
20	ſ	1 Gr.		8	Pf.
24	ſ	2	ſ	—	ſ
30	ſ	2	ſ	6	ſ
36	ſ	3	ſ	—	ſ
40	ſ	3	ſ	4	ſ
48	ſ	4	ſ	—	ſ

50	Pfennige	machen	4	Groſchen	2	Pf.
60	=	=	5	=	—	=
70	=	=	5	=	10	=
72	=	=	6	=	—	=
80	=	=	6	=	8	=
84	=	=	7	=	—	=
90	=	=	7	=	6	=
96	=	=	8	=	—	=

B.

24	Groſchen	machen	1	Rthlr.	—	Gr.
30	=	=	1	=	6	=
40	=	=	1	=	16	=
48	=	=	2	=	—	=
50	=	=	2	=	2	=
60	=	=	2	=	12	=
70	=	=	2	=	22	=
72	=	=	3	=	—	=
80	=	=	3	=	8	=
90	=	=	3	=	18	=
96	=	=	4	=	—	=

Denn wenn mann dieſe Säze auswendig weiß, ſo darf mann in dem vorigen Exempel §. 34. nur erſt die Pfennige gerade auf rechnen; da denn die Summe 42 Pfennige iſt; weil mann nun weiß, daß 40 Pf. 3 Groſchen 4 Pf. machen, ſo ſieht mann ſogleich daß 42 Pfennige 3 Gr. 6 Pf. betragen; mann merket alſo die 6 Pf. in der Summe an, und nimmt die 3 Gr. ſogleich zu den Groſchen; rechnet dieſe wieder gerade auf, und bekömmt 89 Gr.; weil mann nun weiß, daß 90 Groſchen gerade 3 Rthlr. 18 Gr. machen, ſo folgt, daß 89 Groſchen 3 Rthlr. 17 Gr. machen; dieſe 17 Gr. ſezt mann unter die Summe, und ziehet die 3 Rthlr. zu den Thalern, da mann denn 15 Rthlr. zur Summe erhält.

36. Auf

36.

Auf ånliche Weiſe werden Winſpel, Scheffel und Mezen addiret, wobei zu merken iſt, daß ein Winſpel 24 Scheffel, und 1 Scheffel 16 Mezen halte.

Wſp.	Scheffel	Mz.
1	10	2
—	14	14
—	8	6
—	21	7
—	23	15
...	..	
4 Wſp.	6 Schfl.	12 Mezen.

37.

Eben ſo verfårt mann bei Berechnung der Maſe flůſſiger Dinge. So hålt ein Fuder Wein 6 Ohm, ein Ohm 2 Eimer, ein Eimer 2 Anker, ein Anker 32 Quart, ein Quart 2 Nöſel.

Fuder.	Ohm.	Eimer.	Anker.	Quart.	Nöſel.
—	2	1	—	16	—
—	4	—	—	—	—
—	—	1	1	10	1
—	5	—	1	8	—
1	4	1	1	4	—
—	—	—	—	6	1
—	—	—	—	4	1
..	..	..	.	.	
3 Fuder	5 Ohm	1 Eimer	— A.	17 Qu.	1 N.

III. Sub-

III.
Subtrahiren mit Einern und Zehnern.

38.

Wenn mann eine Zal von der andern abziehn ſoll, ſo müſſen die Zalen auch beide gleiche Benennung haben. Mann kann wol von zwölf Groſchen vier Groſchen abziehn, und ſagen, daß alsdenn noch acht Groſchen übrig bleiben; aber wenn von zwölf Groſchen vier Pfennige ſollen abgezogen werden, ſo kann ich weder ſagen, daß acht Groſchen, noch auch daß acht Pfennige übrig bleiben, weil Groſchen und Pfennige nicht einerlei Art Münze ſind.

39.

Mann präge, wenn mann geſchwind im Abziehn fortkommen will, dem Gedächtniſſe folgende Säze ein:

1	von	2	bleibt	1	3	von	4	bleibt	1
2	=	3	=	1	3	=	5	=	2
2	=	4	=	2	3	=	6	=	3
2	=	5	=	3	3	=	7	=	4
2	=	6	=	4	3	=	8	=	5
2	=	7	=	5	3	=	9	=	6
2	=	8	=	6	3	=	10	=	7
2	=	9	=	7					
2	=	10	=	8					

4	von	5	bleibt	1
4	=	6	=	2
4	=	7	=	3
4	=	8	=	4
4	=	9	=	5
4	=	10	=	6
5	von	6	=	1
5	=	7	=	2
5	=	8	=	3
5	=	9	=	4
5	=	10	=	5
6	von	7	bleibt	1
6	=	8	=	2
6	=	9	=	3
6	=	10	=	4
7	von	8	bleibt	1
7	=	9	=	2
7	=	10	=	3
8	von	9	bleibt	1
8	=	10	=	2
9	von	10	bleibt	1

40.

Wir nemen hier an, daß die Zal, von der mann abziehn ſolle, gröſſer ſei, als die, welche mann abzieht.

Erſter Fall. Wenn die obern Ziffern alle gröſſer ſind als die untern.

Mann ſchreibe die Zal, von der mann abziehn ſoll, und unter dieſe die Zal, welche mann abziehn ſoll, ſo daß Einer unter Einer, und Zehner unter Zehner kommen. Mann ziehe ab, und ſchreibe die übrigbleibende Zal zum Unterſchiede unter einen Strich, oder Linie.

Z. E.

von	86	von	95
	24 abgezogen		72 abgezogen
bleiben	62	bleiben	23

Zweiter Fall. Wenn die obern Ziffern nicht alle gröſſer ſind als die untern.

Z. E. von 21 ist 16 abzuziehen; von 22 iſt 15 abzuziehen.

Z. E. von	21	von	22
iſt	16 abzuziehen	iſt	15 abzuziehen.

Wenn

Wenn ich 16 von 21 abziehn ſoll; ſo kann ich freilich 6 Einer von 1 Einer nicht abziehn; weil aber doch jeder Zehner in der folgenden Stelle 10 Einer in ſich hält; ſo kann ich von den 2 Zehnern einen zu Hülfe nemen, oder borgen. Ich ſage alſo, 6 von 10 bleibt 4 und die 1 dazu iſt 5. Ich gehe fort zur andern Stelle, wo ich 1 Zehner von 2 Zehnern weggenommen habe, ſo kann ich nur 1 Zehner von 1 Zehner abziehn, da denn nichts weiter übrig bleibt.

Damit mann aber nicht vergeſſe, daß mann ſchon bei der folgenden Stelle eins weggenommen habe, ſo pflegt mann die Zal mit einem Punkt zu bezeichnen, bei welcher mann geborgt hat; das zeigt denn an, daß ſie nun eins weniger gilt. Z. E.

2·1	2·2	9·8	8·7	6·4
16	15	59	28	18
5	7	39	59	46

Ich ſage in dem lezten dieſer Exempel: acht von vier geht nicht; borge ich einen Zehner, ziehe die 8 davon ab, die 4 dazu, bleiben 6. Ferner 1 von 5 (weil 1 von 6 ſchon entlent worden) bleibt 4.

41.

Will mann geſchwinder mit dem Abziehn fertig werden, ſo muß mann auſer den §. 39. angefürten noch folgende Säze auswendig wiſſen.

1	von	10	bleibt	9
2	von	10	bleibt	8
2	=	11	=	9
3	von	10	bleibt	7
3	=	11	=	8
3	=	12	=	9
4	von	10	bleibt	6
4	=	11	=	7
4	=	12	=	8
4	=	13	=	9
5	von	10	bleibt	5
5	=	11	=	6
5	=	12	=	7
5	=	13	=	8
5	=	14	=	9
6	von	10	bleibt	4
6	=	11	=	5
6	=	12	=	6
6	=	13	=	7
6	=	14	=	8
6	=	15	=	9

7	von	10	bleibt	3
7	=	11	=	4
7	=	12	=	5
7	=	13	=	6
7	=	14	=	7
7	=	15	=	8
7	=	16	=	9
8	von	10	bleibt	2
8	=	11	=	3
8	=	12	=	4
8	=	13	=	5
8	=	14	=	6
8	=	15	=	7
8	=	16	=	8
8	=	17	=	9
9	von	10	bleibt	1
9	=	11	=	2
9	=	12	=	3
9	=	13	=	4
9	=	14	=	5
9	=	15	=	6
9	=	16	=	7
9	=	17	=	8
9	=	18	=	9

42.

Hat mann nun auch dieſe Säze im Kopfe, ſo werden die §. 40. angeſetzten Exempel geſchwinder ſo berechnet.

a	b	c	d	e
2·1	2·2	9·8	8·7	6·4
16	15	59	28	18
5	7	39	59	46

a) 6 von 11 bleibt 5; 1 von 1 geht auf.
b) 5 von 12 bleibt 7; 1 von 1 geht auf.
c) 9 von 18 bleibt 9; 5 von 8 bleibt 3.
d) 8 von 17 bleibt 9; 2 von 7 bleibt 5.
e) 8 von 14 bleibt 6; 1 von 5 bleibt 4.

43.

Tab. I. Fig. 1.

Dieſe Rechnung, und beſonders das Borgen läßt ſich noch von einer andern Seite erläutern.

Geſezt, es habe jemand auf ſeinem Tiſche 2 Zehnthalerſtüken, und 1 ganzen Thaler liegen; ſo machen dieſe

21 Rthlr.

Die 2 bedeutet die zwei Zehnthalerſtüke, und die 1 den einzelnen Thaler. Nun ſoll ich 16 Rthlr. davon wegnemen. Ich kann freilich wo 21 Rthlr. ſind, davon 16 wegnemen; allein die 21 Rthlr. liegen hier nur in drei Stüken vor mir, nemlich 2 Zehnthalerſtüken, und 1 ganzer Thaler. Näm ich nun ein Zehnthalerſtük weg, und den 1 ganzen Thaler dazu, ſo wärens erſt 11 Thaler. Näm ich 2 Zehnthalerſtüken, ſo wärens ſchon 20 Rthlr. und alſo zu viel. Was iſt alſo zu thun? ich muß nothwendig eins von den Zehnthalerſtüken wechſeln, und mir zehn einzelne Thaler dafür geben laſſen.

Es

Es liegen alſo nun auf dem Tiſche

1 Zehnthalerſtük, 10 einzelne Thaler, 1 einzelner Thaler. Das iſt: Tab. I. Fig. 2.

1 Zehnthalerſtük, 11 einzelne Thaler.

Davon ſoll ich 1 Zehnthalerſtük 6 einzelne Thaler, d. i. 16 Rthlr.

abziehn, ——————————— ſo müſſen

nothwendig — — 5 einzelne Thaler bleiben.

Auf eben die Art, wenn ich Tab. I. Fig. 3.

von 21

abziehn ſoll 16

ſo ſoll ich 6 Einer von 1 Einer, und 1 Zehner von zwei Zehner abziehn. Ich muß alſo von den 2 Zehnern einen wechſeln, und ihn in 10 Einer verwandeln. So bekomme ich 10 Einer, dazu 1 Einer, der ſchon da ſtand, macht 11 Einer. Es ſäh alſo nun das Exempel ſo aus:

	1 Zehner	11 Einer	
davon	1 —	6 —	abgezogen
bleiben	— —	5 Einer.	

Dieſe Weitläufigkeit hat mann aber nicht nötig, wenn manns ſo macht wie vorher, und durch einen Punkt über den 2 Zehnern anzeigt, daß mann einen davon genommen, und in 10 Einer verwandelt habe.

$$\begin{array}{r} \dot{2}1 \\ 16 \\ \hline 5 \end{array}$$

Denn hier kommt mann auf die nemliche überbleibende Zal, indem mann 6 von 11 (d. i. 6 Einer von elf Einern)

nern) und hiernächſt 1 von 1, die vorher 2 waren, (d. i. 1 Zehner von 1 Zehner) abzieht.

44.

Wenn mann Thaler, Groſchen und Pfennige von Thalern, Groſchen und Pfennigen abziehn ſoll, ſo hat die Sache keine Schwierigkeit, wenn alle abzuziehende Zalen kleiner ſind, als die, von welchen mann abziehn ſoll.

Z. E.

15 Rthlr.	22 Gr.	11 Pf.
8 Rthlr.	14 Gr.	6 Pf.
7 Rthlr.	8 Gr.	5 Pf.

Wenn aber die obere Zal der Groſchen und Pfennige kleiner iſt, ſo verfärt mann ſo:

Erſter Fall; wenn blos die obere Zal der Pfennige kleiner iſt.

Exempel:

von 15 Rthlr. 14 Gr. 6 Pf.
ſollen 8 Rthlr. 6 Gr. 11 Pf. abgezogen werden.

11 Pf. kann ich zwar von 6 Pf. nicht abziehn; weil aber jeder Groſchen 12 Pf. enthält; ſo borge ich einen Groſchen und verwandle ihn in 12 Pf.; punktire daher die 14 Gr.; neme hierauf die 12 Pf. zu den 6 Pf., welche zuſammen 18 Pf. machen, und ſage 11 von 18 bleiben 7. Darauf 6 Gr. von 13 Gr. bleiben 7. Ferner 8 Rthlr. von 15 Rthl. bleiben 7. Daher ſieht nun das Exempel ſo aus:

15 Rthlr.	14˙ Gr.	6 Pf.
8 Rthlr.	6 Gr.	11 Pf.
7 Rthlr.	7 Gr.	7 Pf.

Zwei-

Zweiter Fall. Wenn beides die obern Groſchen und Pfennige kleiner ſind, als die untern.

Z. E.

von 15· Rthlr. 11· Gr. 8 Pf.
ſollen 8 Rthlr. 15 Gr. 11 Pf. abgezogen werden

bleiben 6 Rthlr. 19 Gr. 9 Pf.

Bei den Pfennigen wie vorher. Ich borge einen Groſchen, d. i. 12 Pf.; ziehe davon 11 Pf. ab, bleibt 1 Pf. welcher mit den obenſtehenden 8 Pf. zuſammen 9 Pf. macht. Oder: die 12 aus dem geborgten Groſchen erwachsne Pfennige machen mit den ſchon da ſtehenden 8 Pf. zuſammen 20 Pf., davon 11 Pf. abgezogen, bleiben wie vorher 9 Pf.

Nunmer gehe ich zu den Groſchen. Ich darf nun nicht mer ſagen 15 Gr. von 11 Gr. Denn der Punkt über 11 erinnert mich, daß ſchon ein Groſchen weg iſt. Es heiſt alſo 15 Gr. von 10 Gr. Aber das geht nicht. Ich muß alſo einen Thaler borgen, der hat 24 Gr. Dieſe 24 Gr. und 10 Gr. machen 34 Gr. Von 34 Gr. ziehe ich nun 15 Gr. ab, ſo bleiben 19 Gr.

Endlich heiſt es, 8 Rthlr. von 14, (weil es nicht mer 15 ſondern eins weniger ſind, wie der Punkt anzeigt) bleiben 6 Rthlr.

Dritter Fall. Wenn oben blos Thaler ſtehn, und doch Thaler, Groſchen und Pfennige abgezogen werden ſollen.

Als:

von 25 Rthlr. — Gr. — Pf.
ſollen 12 Rthlr. 18 Gr. 6 Pf. abgezogen werden.

In dieſem Falle thut ein Anfänger am beſten, wenn er ſtatt der Thaler, einen Thaler weniger, und ſtatt die-

ſes einen Thalers 23 Gr. 12 Pf. ſchreibt. Denn 23 Gr. und 12 Pf. ſind ſo viel als ein Thaler. Er ſchreibe alſo das Exempel ſo:

von 24 Rthlr. 23 Gr. 12 Pf.
ſollen 12 Rthlr. 18 Gr. 6 Pf. abgezogen werden

bleiben 12 Rthlr. 5 Gr. 6 Pf.

Hat mann viele ſolche Exempel gerechnet, ſo kann manns endlich im Kopfe thun, one dabei zu ſchreiben.

45.

Bei Getreidemaſen verfärt mann auf änliche Art beim Abziehn, wenn mann nur merkt, daß ein Winſpel 24 Scheffel, und 1 Scheffel 16 Mezen hat.

Z. E.

von 3 Wſp. 10 Schf. 8 Mezen
ſollen 1 Wſp. 14 Schf. 13 Mezen abgezogen werden

bleiben 1 Wſp. 19 Schf. 11 Mezen.

Und wenn von

3 Wſp. — Schf. — Mez.
1 Wſp. 14 Schf. 13 Mezen abgehn,

ſo iſt das eben ſo viel, als wenn mann

von 2 Wſp. 23 Schf. 16 Mezen
1 Wſp. 14 Schf. 13 Mezen abzöge

ſo daß 1 Wſp. 9 Schf. 3 Mezen bleiben.

46.

Eben ſo verfärt mann beim Abziehn der Maſe flüſſiger Dinge.

Es fanden ſich in einem Weinlager

3 Fuder 5 Ohm 1 Eimer — Anker 17 Quart 1 Nöſel;

davon wurden weggegeben

1 Fuder 5 Ohm 1 Eimer 1 Anker 4 Quart — N.

blieben

1 Fuder 5 Ohm 1 Eimer 1 Anker 13 Quart 1 Nöſel.

47.

Abziehen nennt mann auch Subtrahiren, und dieſe Rechnung heiſt die Subtraction.

48.

Die Zal, welche übrig bleibt, nachdem das Kleinere von dem Gröſſern abgezogen worden, heiſt der Reſt oder die Differenz.

49.

Wenn mann zur Differenz die kleinere Zal addiret, ſo kömmt die gröſſere Zal wieder heraus.

50.

Eine Zal von der andern wegnemen, iſt nun leicht, wenn man auf das bisherige Achtung gegeben hat.

Es gibt aber Fälle, wo mann unter gewiſſen Bedingungen etwas wegnemen ſoll; da gibt es denn oft Schwierigkeiten. Z. E.

Es ſollte ein Schiffer einen Wolf, eine Ziege, und einen Korb mit Kol in einem Kane über einen Fluß ſezen, jedoch unter der Bedingung, daß keines von den dreien beſchädigt, und mer nicht als eins auf einmal über den Fluß geſezt würde. Wie wird dis der Schiffer angefangen haben?

Fur er zuerſt den Wolf herüber, ſo fras unterdeſſen die Ziege den Kol.

Fur er zuerſt den Kol herüber, ſo fras unterdeſſen der Wolf die Ziege.

Fur er zuerſt die Ziege herüber, ſo mußte er entweder aufs zweitemal den Kol, oder den Wolf herüberfaren; im erſten Falle fras die Ziege den Kol; in leztem der Wolf die Ziege.

Solutio problematis.

Nauta primum capram transvehit, ſecunda vice corbem, qua in altero littore depoſita reducit capram, eamque in citeriori littore relinquit; ita ut lupum tertia vice fluvium ſuperans avehat; quarta vice capram iterum transvehit.

51.

Eben ſo wenn ich was wegmeſſen, oder auswägen ſoll, ſo iſt nicht genug, daß ich auf dem Papiere ſubtrahiren kann, ich muß auch mit Meſſen und Wägen umzugehn wiſſen. Wie das nun anzufangen ſei, leret der folgende Abſchnitt.

IV.

Addition und Subtraction mit Masſtab und Gewicht,

oder erſte Begriffe von geraden Linien, und Hebeln.

52.

Gerade Linien kann mann theils in der Natur ſehen, theils ſich einbilden, theils ſelbſt machen, oder ausdrüken. Mann ſieht eine gerade Linie in der Natur, wenn mann an einem geradeſtehenden Baume, an einem geradeſtehenden

den Lilienſtengel hinauf ſieht; oder wenn mann die äuſerſte Schärfe eines Quaderſteins anſieht.

Mann kann ſich eine gerade Linie einbilden, wenn mann ſich den Weg der Länge nach vorſtellt, den ein von einem Altan herab nicht ſchief, ſondern gerade aus der Hand fallender Stein macht.

53.

Eine gerade Linie auf dem Papier zu ziehen, bedienet mann ſich eines Lineals, an welches mann die Feder, oder den Bleiſtift hart und ſtät anlegt, indem mann mit der Hand fortzieht.

Auf änliche Weiſe kann mann ein Stük Papier nach dem Lineale beſchneiden, ſo daß es auf allen Seiten in gerade Linien eingeſchloſſen werde.

54.

Wenn Zimmerleute Bauholz nach gerader Linie behauen wollen, ſo bedienen ſie ſich dabei einer ſtraff geſpannten Schnur.

Eine ſolche Schnur gebrauchen auch die Gärtner, wenn ſie Heken nach gerader Linie beſchneiden wollen.

55.

Wenn nun gerade Linien abgemeſſen werden ſollen, ſo bedienet mann ſich bei Tüchern und Zeugen, dazu der Elle.

In vielen andern Fällen, z. E. wenn die Länge der Aeker ausgemeſſen werden ſoll, bedienet mann ſich der Meßſtäbe, Meßſchnuren und Meßketten, die in Ruthen, Schuh und Zolle abgetheilt werden.

 Durch

Durch Hülfe dieſer Werkzeuge kann mann nicht nur eine jede gerade linie, an welcher mann von einem Ende bis zum andern gehen kann, ausmeſſen, ſondern auch von einer linie ein beſtimmtes Stük abſchneiden, oder ſie um ein beſtimmtes Stük verlängern.

Wenn mann mit Stäben miſſet, ſo muß mann ſich in Acht nemen, daß mann den Stab nicht überſchlage, ſondern ihn hart an den Punkt anlege, wo er das nächſt vorhergehende mal mit ſeinem Ende auflag. Bei Meß-ketten muß verhütet werden, daß ſie wegen der Schwere bei groſer länge in der Mitte nicht einen Bauch oder Krümmung machen, welches durch öfters Unterſtüzen mit Stäben, und durch ſtraffes Anziehn vermieden wird. Bei den Meßſchnüren muß mann dem Zuſammenziehen durch die Feuchtigkeit vorbeugen.

56.

Um ſich vom Abwägen eine Vorſtellung machen zu können, muß mann wiſſen:

1) Daß alle Körper ſchwer ſind, und wenn ſie nicht unterſtüzt ſind, nach der Erde zu fallen.

2) Daß es bei der Schwere nicht auf den Raum ankömmt, den ein Körper einnimmt; indem ein Kör-per, der einen viel gröſſern Raum einnimnt als der andre, doch viel leichter ſein kann, als dieſer, der einen viel gröſſern Raum einnimmt. Ein Körper, der bei gleichem Raume doch ſchwerer iſt, als der andre, heiſt ſpecifiſch ſchwerer. So würde eine Meze Dukaten ſchwerer ſein, als eine Meze Sil-bergroſchen, wenn gleich jeder Silbergroſchen ſo groß und dik wäre als ein Dukaten. Das macht, Gold iſt ſpecifiſch ſchwerer als Silber.

57.

Wenn ein gerader Stab wie C D auf eine Unterlage E, die oben ganz ſpiz zuläuft, aufgelegt wird, ſo wird der Stab nicht überall, wo ich ihn nach Belieben auflegen möchte, auf der Unterlage ruhig ſchwebend bleiben, ſondern bald auf die rechte Seite, bald auf die linke überfallen. Tab.I. Fig. 5.

Wenn aber der Stab an allen Orten gleich breit und dik iſt, auch aus einerlei Materie z. E. Eiſen beſteht, ſo wird er gerade da, wo ſein Mittelpunkt der länge iſt, aufgelegt, im Gleichgewichte bleiben, d. h. er wird von keiner Seite überfallen.

Dis lert die Erfarung. Und warum ſollte es anders ſein? Wenn C V ſtärker zur Erde ziehen ſollte als V D, ſo müßte C V mer Kräfte haben als V D. Eben ſo, wenn V D ſtärker ziehen ſollte als C V, ſo müßte V D mer Kräfte haben als C V. Dis kann aber in dieſem Falle nicht ſein. Denn C V iſt ſo lang, ſo breit, ſo dik als V D, und beſteht auch mit demſelben aus einerlei Materie. Folglich kann C V nicht ſtärker ziehn als V D. Eins zieht alſo ſo viel als das andre. Es kann ſich alſo keines von beiden Theilen auf der Unterlage bewegen, ſondern der Stab muß ruhig liegen, d. h. im Gleichgewichte bleiben.

58.

Hängt mann nun an einen ſolchen Stab, aus einerlei Materie, der ebenfals in der Mitte unterſtüzt iſt, ſo daß er zu beiden Seiten gleich lang, breit und dik, folglich auch gleich ſchwer iſt, ein par gleiche Gewich- Tab.I. Fig. 7.

ter, wie Fig. 7. L und M, ſo muß wieder ein Gleichgewicht entſtehen.

59.

Hångt mann endlich ſtatt dieſer Gewichter ein par gleichvielwiegende Schalen an; ſo wird auch hier ein Gleichgewicht erfolgen můſſen; und wenn in beide Schalen gleichviel an Gewichte geleget wird, ſo kann das Gleichgewicht auch hiedurch nicht geåndert werden.

Dieſer Fall iſt nun bei den gewônlichen Kramerwagen. Hier iſt ein in zwei gleichlange und gleichſchwere Aerme abgetheilter Wagebalken, deren jeder am Ende geboret iſt, daß mann die Wageſchalen an ihren Schnůren einhången kônne. Der Wagebalken ruhet mit ſeiner durch den Mittelpunkt ſeiner långe gehenden Axe in dem Wagkloben, ſo daß er ſich darin frei zu beiden Seiten bewegen kann. Die Zunge, oder das Zůnglein, iſt ein auf dem Wagebalken gerade aufgerichteter Stift, der, wenn er gerade in dem Wagekloben inneſteht, eben dadurch anzeigt, daß die Wage auf keiner Seite den Ausſchlag gebe.

60.

Wenn mann nun auf einer ſolchen Wage ein Pfund Ware, z. E. Zuker abwågen will, ſo legt mann in die eine Schale ein Pfundgewicht, und in die andre Schale ſo viel Zuker, als mann denkt, daß ungefer ſo viel als ein Pfund wiegen werde. Gibt nun der Wagebalken auf der Seite, wo der Zuker liegt, den Ausſchlag, ſo hat mann zu viel aufgelegt; und muß noch etwas abnemen, um gerade nicht mer als ein Pfund zu bekommen. Iſt aber der Ausſchlag auf der Seite des Pfundgewichts, ſo ſieht mann, daß dieſes noch ſchwerer iſt, als der aufgelegte

legte Zuker, und daß mann folglich zu dieſem, noch etwas zulegen müſſe, um ein Pfund voll zu machen. Denn nur alsdann iſt auf einer richtigen Kramerwage die Ware dem aufgelegten Gewichte gleich, wenn die Wage inneſteht, d. h., der Wagebalken auf keiner Seite den Ausſchlag gibt.

61.

Zur Richtigkeit der Kramerwage wird alſo erfodert, daß der Wagebalken auf beiden Seiten gleich lang und gleich ſchwer, auch die Wageſchalen gleichſchwer ſein. Will mann die Richtigkeit einer ſolchen Wage probiren, ſo darf mann nur entweder die leren Wageſchalen mit einander vertauſchen, und ſehen, ob ſie nach der Umtauſchung noch wie vorher im Gleichgewichte bleiben; oder mann kann die Ware und das Gewicht mit einander umtauſchen. Bleibt die Wage, die vorher inneſtand, als die Ware in der rechten, das Gewicht aber in der linken Schale lag, noch im Gleichgewicht, wenn mann jene in die linke, dieſes aber in die rechte Schale legt, ſo iſt die Wage richtig.

62.

Ob die Stränge, woran die Wageſchalen hängen, zu beiden Seiten gleich lang ſind, oder nicht, iſt für die Richtigkeit der Wage gleichgültig. Mann pflegt ſie aber doch, weil es beſſer ausſieht, und in andrer Abſicht bequemer iſt, gleich lang zu machen.

63.

Zu einer gewönlichen Kramerwage pflegt mann eine Anzal von 8 Gewichten zu haben,

davon

davon eins 8 Lot
eins 4 Lot
eins 2 Lot
eins 1 Lot
eins $\frac{1}{2}$ Lot
eins $\frac{1}{4}$ Lot oder ein Quentchen
zwei jedes zu
einem halben Quentchen,
alſo wieder zuſammen $\frac{1}{4}$ Lot, oder ein Quentchen

beträgt zuſammen 15 Lot, und ein halb Lot, und zwei Quentchen; d. i., weil zwei Quentchen ein halb Lot machen, 15 Lot und 2 halbe Lot; d. i. 16 Lot, oder ein halb Pfund.

Hiemit kann mann nicht nur ſo viel einzelne Lot, als mann will, von 1 = 16 abwägen, ſondern mann kann ſich auch damit helfen, wenn mann gleich nicht merere Gewichte hat, um merere Pfunde abzuwägen; nur daß es etwas langſam dabei hergeht.

Wollte ich zum Ex. mit einen Pfundgewichte neun Pfund Zuker abwägen, ſo wäge ich erſt damit ein Pf. Zuker ab; nachher brauche ich dieſes Pf. Zuker ſelbſt ſtatt eines Pfundgewichts, und lege es in die andre Schale, wo das Pfundgewicht liegt. Auf dieſe Art kann ich nun ſchon noch zwei Pfund Zuker abwägen. Iſt dis geſchehn, ſo lege ich die drei Pfund Zuker anſtatt des Gewichts in die eine Schale, und wäge damit zweimal hintereinander drei Pfund ab; ſo daß aller nach und nach abgewogner Zuker nun neun Pfund beträgt.

64.

Ein jeder gerader Stab, oder überhaupt eine jede gerade ſteife Linie, woran, wie wir an dem Wagbalken geſehen haben, eine Unterlage oder Ruhepunkt (hypomochlion) angebracht iſt, nebſt zwei Gewichten, die den Stab, jedes nach einer andern Seite hin zu bewegen ſuchen, heiſt ein Hebel.

Tab. I. Fig. 7.

Alſo iſt Fig. 7. ein Hebel; denn hier iſt ein

Stab,

Stab, oder eine ſteife unbiegſame Linie I K; hier iſt in der Mitte ein Ruhepunkt, auf welchem der Stab aufliegt, und ſich ſowol nach I als nach K abwärts bewegen kann; endlich ſind hier zwei Gewichte L und M. Das Gewicht L ſucht das Ende des Stabs I herunter, hingegen das Ende K in die Höhe zu bringen; das Gewicht M hingegen ſucht das Ende K herunterzuziehn, und das Ende I in die Höhe zu bringen. Beide Gewichter hindern alſo einander in ihrer Bewegung; oder ſind einander entgegengeſezt.

65.

Gewichter, die einander in ihrer Bewegung hindern, pflegt mann Kraft und Laſt zu nennen (vis et pondus); an ſich iſt es einerlei, welches von beiden mann Kraft oder Laſt nenne; denn ſie ſind beide Kräfte und Laſten. Im gemeinen Leben aber nennt mann das Gewicht, was mann bewegen oder abwägen will, die Laſt; hingegen das Gewicht, womit mann bewegt, oder abwägt, die Kraft.

So heiſt mann z. B. bei einer Kramerwage die Ware, die mann abwägt, die Laſt, und das Gewicht, womit mann die Ware abwägt, die Kraft.

66.

Wo alſo eine unbiegſame Linie ſich denken läßt, die auf einem Ruhepunkt liegt, und an welcher Kraft und Laſt angebracht ſind, da kann mann ſich einen Hebel vorſtellen.

67.

Wenn der Ruhepunkt oder die Unterlage bei einem Hebel zwiſchen Kraft und Laſt ſich befindet, ſo iſt es ein

wag=

wagförmiger Hebel (vectis homodromus); wenn aber der Ruhepunkt auf der einen Seite, Kraft und Laſt aber auf der andern ſind, ſo iſt es ein Hebel der zweiten Art (vectis heterodromus). Tab. I. Fig. 6. 7. 8. ſtellen wagförmige Hebel vor. Tab. II. Fig. 9. ist ein Hebel der zweiten Art. Die Unterlage iſt auf der einen Seite bei C; Kraft und Laſt aber auf der andern bei V und P. Die Kraft ſucht den Hebel nach der Rolle bei V in die Höhe zu ziehn. Die Laſt hingegen bei P ſucht ihn herunter zu drüken.

Tab. II. Fig. 9.

68.

Bei einem wagförmigen Hebel kommen zwei Fälle vor, die beſonders merkwürdig ſind. Da der Ruhepunkt hier zwiſchen Kraft und Laſt angebracht iſt, ſo iſt er entweder gerade in der Mitte zwiſchen Kraft und Laſt angebracht, ſo daß die Kraft von dem Ruhepunkte eben ſo weit entfernt iſt, als die Laſt; oder der Ruhepunkt iſt nicht gerade in der Mitte, ſo daß die Kraft dem Ruhepunkte näher iſt, als die Laſt, oder umgekert.

69.

Im erſten Falle, wenn in dem wagförmigen Hebel der Ruhepunkt gerade in der Mitte der Kraft und Laſt angebracht iſt, muß ein Gleichgewicht erfolgen, wenn beide Gewichte, Kraft und Laſt, einander gleich ſind.

Beweis. Wenn in dieſem Falle eine Bewegung, und kein Gleichgewicht erfolgen ſollte, ſo müßte entweder die Kraft ſich mer bewegen als die Laſt, oder die Laſt mer als die Kraft. Nun kann ſich aber keine von beiden in dieſem Falle mer bewegen als die andre. Alſo kann auch

auch keine Bewegung, ſondern es muß ein Gleichgewicht erfolgen.

Daß ſich aber keine von beiden, weder die Kraft noch die Laſt mer bewegen kann, als die andre, erhellet daraus, weil keine in dieſem Falle mer Wucht, und keine mer Geſchwindigkeit hat.

Die Wucht iſt gleich; denn ein Gewicht iſt ſo ſchwer als das andre; es hat eben ſoviel Materie, als das andre. Tab. II. Fig. 10.

Die Geſchwindigkeit iſt auch gleich. Wenn der Ruhepunkt in der Mitte des Hebels iſt, und V oder die Kraft ſich um die Linie V X herunter beweget, ſo beweget ſich das Ende P oder die Laſt um die Linie P Q hinauf. Nun iſt aber die Linie V X ſo gros als die Linie P Q. Beide Gewichte müſſen alſo in gleicher Zeit den nemlichen Weg machen, oder den nemlichen Raum durchlaufen; das heiſt, ſie müſſen gleiche Geſchwindigkeit haben.

Folglich, da in dieſem Falle in beiden Gewichten gleiche Wucht und Geſchwindigkeit iſt, ſo kann ſich keines mer bewegen, als das andre. Eins muß ſich alſo ſo viel bewegen als das andre. Das heiſt, das Gewicht V muß eben ſo viel auf der einen Seite herabziehn, als P auf der andern. Da nun nicht beide Seiten zugleich herabgezogen werden können, ſondern eine notwendig ſteigen muß, wenn die andre ſinkt, ſo hindert das Gewicht V eben ſo viel, daß der Hebel in P ſinken kann, als das Gewicht P ihn antreibt nach dieſer Seite zu ſinken. Er kann alſo unter dieſen Umſtänden gar nicht ſinken, ſondern muß unbeweglich, oder im Gleichgewichte bleiben.

70. Wir

70.

Wir wollen zu mererer Deutlichkeit dieſen Beweis noch auf eine andere Art ſtellen.

Es iſt aus mer als einem Beiſpiele begreiflich, daß es bei der Bewegung eines Körpers, oder bei der Kraft, die er anwendet, auf zwei Stüke ankomme, auf die Maſſe, das heiſt, auf die Menge von Materie die er beſizt, und auf die Geſchwindigkeit die er hat.

Z. E. eine Kugel, die ein Pfund ſchwer iſt, und zweimal ſo geſchwinde läuft, richtet eben ſo viel aus, als eine Kugel, die zwei Pfund ſchwer iſt, und nur halb ſo geſchwinde läuft als jene.

Wenn zwei Leute mit einander fechten, und der eine dem andern gleich ſein ſoll, ſo muß nicht nur der eine ſo ſtark ſein als der andre, ſondern ſie müſſen auch gleiche Behendigkeit und Geſchwindigkeit haben.

Ein kleiner Stein, der von der hohen Gallerie eines Thurmes auf den Kopf fiele, könnte mir eben ſo viel Schaden thun, als ein weit gröſſerer, der aber nur ein Stokwerk hoch herunter fiel. Denn jener hat weit mer Geſchwindigkeit, indem alle fallende Körper je länger ſie fallen, deſto mer Geſchwindigkeit erhalten.

Was nun in ſo vielen Fällen gilt, das gilt auch bei der Bewegung des wagförmigen Hebels.

Wenn die beiden Arme eines wagförmigen Hebels einander im Gleichgewicht halten ſollen, ſo muß kein Arm mer Wucht und mer Geſchwindigkeit haben als der andre; oder es müſte gerade dem einen ſo viel, als ihm an der Wucht abging, an der Geſchwindigkeit zugeſezt werden; und ging ihm etwas an der Geſchwindigkeit ab, ſo müßte ihm dafür eben ſo viel an Wucht zugeſezt werden, wenn

wenn er dem andern Arme das Gleichgewicht halten ſollte.

Nun hängt die Wucht von der Menge der Maſſe ab. Je mer Maſſe ein Körper hat, deſto ſchwerer iſt er, deſto mer hat er Wucht. Mann muß aber die Maſſe nicht allein nach dem äuſern Umfange, ſondern auch nach der Dichtigkeit abmeſſen. Denn ſo kann ein Sak Federn einen viel gröſſern Umfang haben, als eine eiſerne Kugel, und doch kann dieſe mer Maſſe, folglich auch mer Wucht haben.

Wenn alſo an beiden Armen eines wagförmigen Hebels Gewichte von gleich viel Maſſe hängen, ſo müſſen auch beide gleiche Wucht haben.

Bei der Geſchwindigkeit, die Kraft und Laſt am Hebel haben ſollen, kommt es auf die Entfernung vom Ruhepunkte an. Die Theile der beiden Arme, die dem Ruhepunkte gleich nahe liegen, haben auch gleiche Geſchwindigkeit. Z. E. Tab. II. Fig. 11. der Punkt A iſt vom Ruhepunkt C eben ſo weit entfernt, als der Punkt B. Während der Zeit nun A ſich bis in G bewegt, ſinkt B bis in D herunter. Dieſe beiden Räume ſind vollkommen gleich. Und da alſo A und B in gleicher Zeit gleiche Räume durchlaufen, ſo iſt auch ihre Geſchwindigkeit gleich. Mann ſeze ferner, daß A ſich bis in H erhebe, ſo wird in der nemlichen Zeit B bis in F herunter ſinken. Nun ſind aber ebenfalls die Räume AH und BF gleich; und da dieſe Räume von A und B in gleicher Zeit durchlaufen werden, ſo ſehn wir von neuem, daß ihre Geſchwindigkeiten gleich ſind. Dis kömmt aber eben daher, daß beide ſowol A als B gleich weit vom Ruhepunkt entfernet ſind.

Denn ſo bald ein Gewicht des Hebels weiter vom Ruhepunkt entfernt iſt als das andre, ſo hat es auch mer

Geſchwindigkeit. Iſt es noch einmal ſo weit davon entfernt, ſo hat es auch noch einmal ſo viel Geſchwindigkeit, als das andre; iſt es dreimal ſo weit vom Ruhepunkt entfernt, ſo hat es auch eine dreimal ſo groſe Geſchwindigkeit. Z. E. in dem Hebel AB. Tab. II. Fig. 12. iſt B dreimal ſo weit vom Ruhepunkt entfernt als A. Daher, indem ſich der kurze Arm AC bis in D bewegt, ſo bewegt ſich in eben der Zeit der lange CB bis in F. Miſſet mann nun den Raum AD und den Raum BF, ſo findet mann, daß BF gerade dreimal ſo lang iſt, als AD. Da nun B den dreimal gröſſern Raum BF in eben der Zeit durchlaufen hat, als A den dreimal kleinern AD, ſo hat B auch eine dreimal gröſſere Geſchwindigkeit gehabt als A.

Aus allem dieſem iſt klar, daß, wenn in dem wagförmigen Hebel der Ruhepunkt in der Mitte beider Arme iſt, und an beiden Enden die Gewichter gleich ſind, keine Bewegung erfolgen könne, ſondern der Hebel im Gleichgewichte bleiben müſſe.

Denn weil die Gewichter gleich ſind, wie vorausgeſezt wird, ſo iſt auch die Wucht auf beiden Seiten gleich.

Und weil die Entfernungen der Gewichter vom Ruhepunkt gleich ſind, ſo ſind auch ihre Geſchwindigkeiten gleich.

Da alſo Wucht und Geſchwindigkeit gleich ſind, ſo kann ſich keins von beiden Gewichtern mer bewegen als das andre. Und da ſie folglich bei gleicher Stärke einander entgegengeſezt ſind, ſo kann auf keiner Seite eine Bewegung erfolgen.

71.

Wenn nun in dieſem Falle der Hebel one die Gewichter, oder, welches einerlei iſt, die beiden Arme des Hebels eine bloſe gerade Linie ſein könnten, ſo käme hier gar nichts

nichts weiter in Betrachtung, als, wie ſchon geſagt, die Wucht und Geſchwindigkeit der Gewichter.

Allein die Arme eines wirklichen Hebels können doch keine bloſe gerade linie ſein.

An eine bloſe gerade linie kann mann ja keine Gewichter hängen. Alſo müſſen die Arme des Hebels ein Stab aus Holz, Eiſen, oder andrer feſter Materie ſein. Dieſe hat ja ſelbſt ihre eigne Wucht. Und alſo entſteht die Frage, ob dieſe Wucht der Arme des Hebels nicht mit in Betrachtung kommen müſſe?

Dieſe Frage iſt allerdings mit Ja zu beantworten.

Wir nemen hier, wie oben bei der Kramerwage, an, daß die beiden Arme des Hebels ein Stab von durchgängig gleicher Dike, und auch aus einerlei Materie ſind.

Gleich lange Stüke dieſes Stabes müſſen alſo gleiche Wucht haben.

Wenn nun ein ſolcher Stab wie AB, Tab. II, Fig. 13. gerade in ſeiner Mitte auf der Unterlage liegt, ſo trägt dieſe Unterlage den ganzen Stab, und ich kann mir alſo vorſtellen, als ob ſeine ganze Wucht oder Schwere in den Punkt C, wo die Unterlage iſt, zuſammengedrängt wäre.

Aber ich kann mir auch eben ſo richtig vorſtellen, als ob die ganze Wucht des Armes AC, im Endpunkte A läge, ſo daß übrigens AC ſelbſt weiter gar keine Schwere hätte; und daß eben ſo die Wucht des Armes CB in dem Endpunkte B läge, und daß übrigens der Arm CB gar keine Wucht oder Schwere hätte.

Um dis leztere deutlich einzuſehn, wollen wir uns einen hölzernen Stab gedenken, der aus zwei gleich ſchweren und überall gleich dichten und diken Stäben zuſammen-

mengeſezt iſt, die der länge nach über einander liegen, und dicht auf einander paſſen. Jeder dieſer Stäbe ſoll in der Mitte ſeiner länge wieder getheilet ſein; ſo daß jedes Stük ſo viel wiege, als das andre.

Wir nemen z. B. an, der obere Stab abom wiege ein Pfund; und der untere eben ſo viel; jedes halbe Stük des obern und untern Stabes, als abgh und ghnl, wird alſo ein halbes Pfund wiegen.

lege ich nun beide Stäbe, ſo wie ſie auf einander liegen, in d auf die Unterlage, ſo bleiben ſie im Gleichgewicht.

Allein das Gleichgewicht wird auch bleiben, wenn ich das halbe Stük ghom wegneme, welches ein halb Pfund wiegt, und dafür in dem Endpunkte bei i entweder eben dieſes halbpfündige Stük, oder ein anderes halbpfündiges Gewicht anhänge; wie bei Fig. 15.

Folglich müßte es auch einerlei ſein, wenn ich eben ſo auch das andre halbpfündige Stük hdik wegnäme, und dafür bei i ein halbpfündiges Gewicht anhinge; wie bei Fig. 16.

Das lezte kann ich zwar nicht wirklich thun, indem auf ſolche Weiſe di eine bloſe linie bliebe, an die ich nichts hängen kann; indeſſen ſieht mann doch nun offenbar, daß ich in der Rechnung nicht irre, wenn ich mir anſtatt des Gewichtes, welches der Arm eines Hebels hat, an ſeinem Endpunkte ein eben ſo ſchweres Gewicht gedenke. Oder mit andern Worten: es iſt gleichviel, ob ich ſage, der Arm des Hebels wiegt drei Pfund, oder ob ich ſage, der Arm des Hebels wiegt gar nichts, dafür aber hängen drei Pfund an ſeinem Endpunkte.

Hieraus ſieht mann nun aber auch, daß wenn gleich ein Hebel allemal ein Stab ſein muß, und keine bloſe linie

nie ſein kann, mann ſich dennoch einen ſolchen Stab als eine gerade Linie vorſtellen kann, an deren beiden Enden ein Gewicht hange, welches gerade ſo ſchwer ſei, als der Arm des Hebels, an deſſen Ende es aufgehångt wåre.

72.

Nun wollen wir den andern Fall des wagförmigen Hebels betrachten, wo der Ruhepunkt nicht gerade in der Mitte zwiſchen Kraft und Laſt, ſondern von der einen weiter entfernt iſt, als von der andern.

Es ſoll alſo die Leiſte oder Stab FG, welcher in drei gleiche Stůke abgetheilt iſt, einen ſolchen Hebel vorſtellen. Bei H iſt die Unterlage oder der Ruhepunkt; und der Arm HG iſt noch einmal ſo lang, als der Arm FH. Hier wird mann nun aus der Erfarung ſehn, daß vier ſolche Stůke, als der Arm HG zwei hat, in F über einander gelegt werden můſſen, wenn der ganze Stab FG, der in H aufliegt, im Gleichgewichte bleiben ſoll. Tab. I. Fig. 6.

Macht mann hingegen wie bei Fig. 8. den einen Arm des Hebels PQ drei ſolche Stůke lang, indeß der andre OP nur eins lang iſt, ſo daß folglich der Endpunkt Q dreimal ſo weit vom Ruhepunkt entfernt iſt, als der Endpunkt O, ſo wird mann in O neun ſolcher Stůke, als PQ drei in ſich enthålt, übereinander legen můſſen, um das Gleichgewicht zu erhalten. Tab. I. Fig. 8.

Wie geht nun dieſes zu, daß im erſten Falle zwei gleiche Stůke mit vier ihres gleichen, und im leztern drei gleiche Stůke gar mit neun ihres Gleichen im Gleichgewichte bleiben?

73.

Um die Urſach davon zu finden, wollen wir jeden Fall beſonders nemen.

Wir wiſſen, daß im Hebel zwiſchen Kraft und Laſt ein Gleichgewicht war, wenn entweder Geſchwindigkeit und Maſſe auf beiden Seiten gleich waren; oder doch gerade ſoviel als an Geſchwindigkeit auf der einen Seite abging, wieder an Maſſe erſezt wurde; ſo wie wenn auf der einen Seite weniger Maſſe war, das Gleichgewicht erhalten werden konnte, wenn dafür eben ſo viel mer Geſchwindigkeit zugeſezt wurde.

Nun nemen wir den erſten Fall.

Tab. I. Fig. 6. Bei dem Stabe FG, der bei H ſeinen Ruhepunkt hat, iſt der eine Arm HG noch einmal ſo lang als der Arm FH.

Wenn alſo auf der andern Seite der Arm FH nur zwei ſolche Stüke übereinander enthalten ſollte, als der Arm FH ihrer zwei in der Länge enthält, ſo wäre zwar die Maſſe auf beiden Seiten gleich, aber nicht die Geſchwindigkeit. Da nun HG ſich noch einmal ſo geſchwind bewegt, als FH, ſo muß dafür FH noch einmal ſo viel Maſſe bekommen, als HG, wenn ſie beide einander das Gleichgewicht halten ſollen.

Nun iſt die Maſſe von HG	2	
die Geſchwindigkeit aber	2	
Da nun die Geſchwindigkeit von FH iſt	1	d. i. halb ſoviel als die von HG
ſo muß die Maſſe dafür ſein	4	d. i. noch einmal ſoviel als die von HG.

Im

Im andern Falle beſteht der eine Arm PQ aus drei ſolchen Stüken, als der andre ONP neun enthält. Mann ſeze, jedes dieſer Stüke wiege ein Pfund; ſo wiegt ONP neun Pfund. Tab. I. Fig. 8.

Auf der Seite PQ ſind drei Pfund, die eine dreifache Geſchwindigkeit haben; weil nun ein Pfund mit dreimal mer Geſchwindigkeit ſo viel vermag, als drei Pfünd mit einfacher Geſchwindigkeit, ſo müſſen

	bei ONP	bei PQ
	3 Pf. mit einfacher Geſchwindigkeit	1 Pfunde mit dreifacher Geſchwindigkeit
	3 Pf. mit einfacher Geſchwindigkeit	1 Pfunde mit dreifacher Geſchwindigkeit
	3 Pf. mit einfacher Geſchwindigkeit	1 Pfunde mit dreifacher Geſchwindigkeit
folglich	9 Pfund mit einfacher Geſchwindigkeit	3 Pfunden mit dreifacher Geſchwindigkeit

das Gleichgewicht halten.

74.

Da die Geſchwindigkeit der Gewichte eben ſo zunimmt, wie die Entfernung vom Ruhepunkte, ſo iſt es einerlei, ob ich ſage, ein Gewicht iſt dreimal ſo geſchwind als das andre, oder ob ſage, es iſt dreimal ſo weit vom Ruhepunkt entfernt.

75.

Nunmer wird mann im Stande ſein, ſich folgende Fragen zu beantworten:

1) Wenn auf der einen Seite des wagförmigen Hebels fünf Pfund hängen, mit fünffacher Entfernung vom Ruhepunkt,

hepunkt, wie viel Pfund werden dieſen auf der andern Seite das Gleichgewicht halten, wenn ſie nur die einfache Entfernung haben.

2) Geſezt, daß auf der einen Seite eines ſolchen Hebels 6 Pfund hängen, die 6 Zoll weit vom Ruhepunkt entfernt ſind, wie viel Pfund muß mann auf die andre Seite hängen, um das Gleichgewicht zu erhalten, vorausgeſezt, daß die Entfernung nur 2 Zoll ſein ſoll?

3) In eben dieſem Falle, wie viel Pfund müßten auf die andre Seite kommen, wann die Entfernung 3 Zoll wäre; und

4) wie viel Pfund kämen auf die andre Seite, wenn die Entfernung 4 Zoll wäre, um den 6 Zoll entfernten 6 Pfunden das Gleichgewicht zu halten?

5) Wenn auf der linken Seite eines wagförmigen Hebels 8 Pfund vier Zoll weit vom Ruhepunkt hängen, wie viel Zoll weit vom Ruhepunkt muß mann auf der rechten Seite ein Gewicht von 2 Pfund hängen, um das Gleichgewicht zu erhalten?

76.

In dem Hebel der andern Art iſt ebenfalls ein Gleichgewicht, wenn das dem Ruhepunkte nähere Gewicht um eben ſo viel ſchwerer iſt, als das andre weiter entfernt und folglich geſchwinder iſt.

Tab. II. Fig. 9. iſt das Gewicht P einen Zoll weit vom Ruhepunkte C entfernt. Hingegen das andre Gewicht V iſt 5 Zoll entfernt. Mann ſeze, das Gewicht V wiege 2 Pfund, ſo wird das Gewicht P 10 Pfund wiegen müſſen, um bei dieſer Entfernung das Gleichgewicht mit jenem zu halten. Denn da 1 Pfund mit fünffacher Geſchwindigkeit ſo viel thut als 5 Pfund mit einfacher Geſchwindigkeit, ſo müſſen auch 2 Pfund mit fünffacher Geſchwindigkeit ſo viel thun als 10 Pfund mit einfacher Geſchwindigkeit.

V. Nu-

V.

Numeration in Zalen, die über die Zehner hinausgehn.

77.

Mann wird ſich aus §. 17 erinnern, daß eine Ziffer, die auf der 2ten Stelle von der rechten Hand an gerechnet ſteht, ein Zehner heiſt, und zehnmal ſo viel bedeutet, als wenn ſie auf der erſten Stelle ſtünde.

78.

Wenn nun eine Ziffer auf der dritten Stelle ſteht, ſo heiſt ſie ein Hunderter, und bedeutet hundertmal ſoviel, als ſie auf der erſten Stelle bedeuten würde.

Z. E. 100 heiſt nicht eins, ſondern einhundert.

110 heiſt nicht eins eins, oder elf, ſondern einhundert zehn.

200 heiſt zweihundert.

236 heiſt nicht zwei drei ſechs; ſondern zweihunhundert dreiſig ſechs; oder zweihundert ſechs und dreiſig.

79.

Steht eine Ziffer auf der vierten Stelle, ſo heiſt ſie ein Tauſender, und bedeutet tauſendmal ſo viel, als ſie bedeuten würde, wenn ſie auf der erſten Stelle ſtünde.

Z. E. 1000 heiſt Eintauſend, (kein Hunderter, kein Zehner, kein Einer); dis in Klammern eingeſchloſſene brauche ich aber nicht auszuſprechen; ſondern nur Eintauſend zu leſen. So heiſt

1001 eintauſend und eins
1010 eintauſend und zehn
1100 eintauſend einhundert.

Und eben ſo wird mann nun folgende Zalen ausſprechen können.

1234; 1780; 1999; 2001; 2220; 9111; 9999; 5050; 6005; 6666; 5442; u. ſ. w.

80.

Steht eine Ziffer auf der fünften Stelle, ſo bedeutet ſie Zehner von Tauſenden, oder Zehntauſender. Und auf dieſer Stelle heiſt alſo 1 nicht eins, ſondern zehntauſend; 6 heiſt nicht ſechs, ſondern ſechzig tauſend; u. ſ. f. So heiſt

10000 zehntauſend
10001 zehntauſend und eins
10010 zehntauſend und zehn
10100 zehntauſend einhundert
11000 elftauſend
10011 zehntauſend elf
10110 zehntauſend hundert und zehn
11100 elftauſend einhundert
10101 zehntauſend hundert und eins
11001 elftauſend und eins
11110 elftauſend hundert und zehn
11101 elftauſend hundert und eins
11011 elftauſend und elf
10111 zehntauſend hundert und elf.

81.

Steht eine Ziffer auf der ſechſten Stelle; ſo bedeutet ſie Hunderttauſender. Alsdenn heiſt 5 nicht fünf,

fünf, ſondern fünfmalhunderttauſend; 8 heiſt auf der ſechſten Stelle achtmalhunderttauſend. Mann leſe alſo folgende Zalen:

100000; 100001; 100010; 100100; 101000; 110000: 100011; 100101; 100110; 101010; 101100; 110101; 100111; 101110; 101101; 111100; u. ſ. f.

82.

Steht eine Ziffer auf der ſiebenten Stelle, ſo bedeutet ſie tauſendmal tauſend, oder eine Million.

8 auf der ſiebenten Stelle heiſt 8 Millionen
5 auf der ſiebenten Stelle heiſt 5 Millionen oder fünftauſendmaltauſend.

Mann leſe alſo folgende Zalen:

1111111; 1111110; 1111101; 1111011; 1110111; 1101111; 1011111; 1111001; 1111010; 1110110; 1101110; 1010101; 1100110; 1001001; 1234567; 7654321; 2223331; 9999888; 5454545; 6969696; 6000006; 7000070; 8000800; 4004000; u. ſ. w.

83.

Mann ſiehet hieraus zugleich, daß jede Ziffer auf der Stelle, wo ſie ſteht, zehnmal ſo viel bedeutet, als auf der nächſt vorhergehenden rechter Hand.

Z. E. in folgender Zal

VI.	V.	IV.	III.	II.	I.
6	6	6	6	6	6

bedeu-

bedeutet die 6 auf der zweiten Stelle ſechzig; aber die auf der dritten Stelle bedeutet zehnmal mer als ſechzig, d. i. ſechshundert; die auf der vierten Stelle bedeutet zehnmal ſo viel, als die auf der dritten, d. i. ſechstauſend, u. ſ. w.

VI.
Addiren mit Zalen, die über die Zehner hinausgehn.

84.

Weil jede Zal auf der nächſtfolgenden Stelle zehnmal ſo viel bedeutet, als auf der nächſtvorhergehenden zur rechten Hand, ſo kann mann nun auch groſe Zalen leicht addiren.

1. Mann ſezt alſo die Zalen ſo, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter, Tauſender unter Tauſender zu ſtehn kommen. Denn wenn mann dis nicht thät, ſo könnte mann leicht Hunderter mit Zehnern, oder Tauſender mit Hundertern zuſammenrechnen, welches doch nicht angeht.
2. Mann fängt von den Einern an, geht zu den Zehnern, denn zu den Hundertern fort, und ſo weiter nach der linken Hand zu.
3. Alle Zehner, die beim Zuſammenrechnen der Zalen einer und eben derſelben Stelle herauskommen, nimmt mann als Einer zu den folgenden. Z. B. wann ich in der Reihe der Zehner funfzehn Zehner zuſammengebracht habe, ſo ſchreibe ich blos die fünf unter; hingegen die zehn Zehner machen einen Hunderter,

derter, der zur folgenden Reihe als Eins gezälet wird. Bei den Hundertern iſt es wieder ſo. Alle Zehner, die hier herauskommen, ſind Zehner von Hundertern, d. i. Tauſender; z. E. 8 Zehner von Hundertern ſind acht Tauſender, und wenn alſo die Reihe der Hunderter am Ende des Zuſammenzälens 61 Hunderter gäbe, ſo ſeze ich blos die 1 unter, und neme die 60 Hunderter, als 6 Tauſender zur folgenden Reihe. Uebrigens wird die Rechnung eben ſo verrichtet, wie oben gezeigt worden.

Exempel.

```
  45789
   6532
  78956
 124793
 578567
 147929
    695
 3::2:: 8::7:6
 -------
1427137
```

Zuſaz. Wenn das vorſtehende Exempel addiret worden, ſo laſſe mann folgende Fragen beantworten:

1. Wär es nicht an ſich willkürlich, wie mann die Zeilen von Zalen untereinander ſezen wollte?
2. Könnte mann aber ſich nicht leicht verirren, wenn mann ſie nicht ſo wie hier untereinander ſezte?
3. Wie könnte mann ſich dabei verirren?
4. Sind die Zalen in der erſten Reihe rechter Hand hinauf 6, 5, u. ſ. w. alle einerlei Art?
5. Bedeuten die Zalen in der zweiten Stelle, eben ſo viel, als die in der erſten?
6. Eine 3 in der zweiten Stelle, bedeutet dieſe drei Einer oder drei Zehner?

7. Wenn eine 3 in der zweiten Stelle 3 Zehner bedeutet, um wie vielmal mer iſt das, als wenn ſie drei Einer bedeutete?

8. Wie viel bedeutet eine 3 in der 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 7ten Stelle?

9. Wie vielmal mer bedeutet eine Zal in der nächſtfolgenden Stelle, als wenn ſie in der nächſtvorhergehenden Stelle ſtünde?

85.

Das Subtrahiren bei gröſſern Zalen geſchiehet auf eben die Art, wie bei den Zehnern ſchon gezeigt worden.

1. Mann ſezt alſo die kleinere Zal unter die gröſſere, ſo daß Einer unter Einer; Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter ꝛc. kommen.

2. Sind die obern Zalen alle gröſſer, als die untern, welche mann abziehn ſoll, ſo kann mann one Schwierigkeit den Reſt finden und unterſchreiben.

Z. E.

$$\begin{array}{r} 7864897 \\ 4352762 \\ \hline 3512135 \end{array}$$

Hier ſollte mann eigentlich ſo ſprechen

2	von 7	bleibt	5
60	von 90	bleibt	30
700	von 800	bleibt	100
2000	von 4000	bleibt	2000
50000	von 60000	bleibt	10000
300000	von 800000	bleibt	500000
4000000	von 7000000	bleibt	3000000
		zuſammen	3512135

Es kömmt aber daſſelbe weit kürzer heraus, wenn mann ſagt: 2 von 7 bleibt 5; 6 von 9 bleibt 3; 7 von 8 bleibt 1; 2 von 4 bleibt 2; u. ſ. w.

86.

86.

3. Iſt eine untere Ziffer gröſſer, als eine obere, ſo muß mann von der nächſtfolgenden Ziffer eins borgen, welches denn die Ziffer, wo mann eben ſteht, um 10 vermeret.

Z. E. 54'3'64'57
4387264
―――――――
1049193

Hier heiſt es: 4 von 7 bleibt 3; (6 von 5 oder 60 von 50 läßt ſich nicht abziehn; ich neme alſo oder borge eine Einheit aus der Stelle der Hunderter. Ein Hundert iſt aber eben ſo viel, als zehn Zehner, und alſo bekomme ich hier nun 15 Zehner; ſo daß ich nun ſagen kann:) 6 von 15 bleibt 9. Nun ſollte es heiſen, 2 von 4; aber der Punkt erinnert mich, daß ich ſchon 1 weggenommen; es heiſt alſo, 2 von 3 bleibt 1. Nun heiſt es weiter, 7 (Tauſender) von 6 (Tauſendern) geht wieder nicht; ich borge alſo bei der folgenden Stelle einen Zehner (Zehntauſender;) ſo kann ich nunmer ſagen, 7 (Tauſender) von 16 (Tauſendern) bleiben 9 (Tauſender) u. ſ. w.

Dieſe Wörter, Hunderter, Tauſender 2c. brauche ich beim Rechnen nicht auszuſprechen; denn wenn ich nur die Ziffern ordentlich unter einander ſeze, ſo kann ich nicht felen, wenn ich gleich, anſtatt, 7 Tauſender von 16 Tauſendern bleiben 9 Tauſender, ſage, 7 von 16 bleiben 9. Denn da ich die 9 in die vierte Stelle ſeze, ſo geſchieht ihr doch ihr Recht, ſie bedeutet allemal in dieſer Stelle 9 Tauſend, wenn ichs auch nicht dazu ſage, ſondern blos Neun ausſpreche.

87.

4. Wenn in der obern Zal, von welcher abgezogen werden ſoll, merere Nullen hintereinander kommen,

unter

unter denen doch wirkliche Ziffern ſtehen, ſo müſte eigentlich ſo verfaren werden:

200007
143218

8 von 7 kann ich nicht abziehn. Ich will bei den Zehnern borgen; es ſind aber keine da; eben ſo gehts in der Stelle der Hunderter; eben ſo in der 4ten Stelle der Tauſender; eben ſo in der 5ten Stelle der Zehntauſender. Endlich komme ich an eine Ziffer 2. Dieſe bedeutet aber nicht 2 Einer, auch nicht 2 Zehner, auch nicht 2 Hunderter, auch nicht 2 Tauſender, auch nicht 2 Zehntauſender, ſondern 2 Hunderttauſender. Ich borge alſo 1 Hunderttauſender zu der 7, von welcher ich die acht nicht abziehn konnte. Ich brauche aber blos 10 Einer von den hunderttauſend Einern. Alſo bleiben noch zurük 99990. Ich ziehe nun 8 von 7 und 10, oder 17, ab, bleibt 9.

Nun ſtünde aber das Exempel ſo:

2·99990
1 43210
56780

Und hiezu die ſchon vorher übrigbleibende 9 gerechnet, wäre der ganze Reſt:

56789.

Aber eben dieſes kommt weit kürzer heraus, wenn ichs ſo anfange, daß ich bei der Null borge, und ſie zehn bedeuten laſſe, die folgende Nullen aber, bei denen ſchon eins geborgt iſt, als 9 anſehe: auf folgende Art:

·2·0·0·0·0·7
1 4 3 2 1 8
5 6 7 8 9

8 von 17 bleibt 9; (nun ſollte es heiſen 1 von 10, aber weil die Null ſchon punktirt iſt, ſo heiſt es) 1 von 9 bleibt 8; und eben ſo 2 von 9 bleibt 7; 3 von 9 bleibt 6; 4 von 9 bleibt 5; 1 von 1 (weil von der 2 ſchon 1 entlent iſt) geht auf.

Anm.

Anm. 1) Mann kann ſich die Richtigkeit dieſes Verfarens noch auf eine andre Art deutlich machen.

Wenn mann 1 von 20 wegnimmt, bleibt 19; eben ſo 1 von 200 bleibt 199; eben ſo 1 von 2000 bleibt 1999; desgleichen 1 von 20000, bleibt 19999. Alſo muß 1 von 200000 laſſen 199999.

Wenn mann nun

von 200007

143218 abziehn ſoll

ſo iſt es eben ſo viel als

von 200000 und 7

143211 und 7 abzuziehn.

Die 7 von der 7 geht auf. Hingegen 1 von 200000 abgezogen, bleiben wie vorher

199999

davon 143210

bleiben 56789 wie oben.

Aber auch dieſe Weitläufigkeit hat mann nicht nötig. Denn mann ſiehet, daß die Subtraction richtig iſt, wenn mann wie oben

geradezu von 2·0·0·0·0·7

abzieht 1 4 3 2 1 8

und ſagt, 18 von 17 bleibt 9; 1 von 9 bleibt 8. u. ſ. f.

2) Auch auf folgende Weiſe wird mann überzeuget werden, daß die n. 4. angegebne Art in dem Falle, wenn oben merere Nullen vorkommen, die richtige ſei. Wir wollen ſezen, daß von 4000 abgezogen werden ſollen 1245.

Nun iſt gewiß, daß 3000 eben ſo viel ſind als: 2000 und 900 und 90 und 10. Denn mann darf das lezte nur addiren, ſo wird 3000 herauskommen.

2000
900
90
10

3000 Summe

Es iſt alſo auch einerlei, ob ich 1245 von 3000, oder ob ich 1245 von 2000 und 900 und 90 und 10 abziehe.

Nun beſteht aber 1245 aus 1000, 200, 40 und 5. Es iſt alſo auch einerlei, ob ich jenes, oder dieſes abziehe.

Mann ziehe alſo

von 2000,	900,	90 und 10	
ab 1000,	200,	40 und 5	
ſo bleiben 1000,	700,	50 und 5	

welche mann aber kürzer ſchreiben kann

1755.

Aber eben dieſe 1755 kämen weit kürzer heraus, wenn mann rechnete

$$\begin{array}{r} 3'0'0'0 \\ 1245 \\ \hline 1755. \end{array}$$

5 von 10 bleibt 5; 4 von 9 bleibt 5; 2 von 9 bleibt 7; 1 von 2 bleibt 1.

88.

Gleiches zu gleichem addirt giebt gleiche Summen. Z. E. 18 iſt ſo viel als 8 und 10; und 15 iſt eben ſo viel als 7 und 8.

Alſo muß es auch gleich viel ſein,

$$\text{ob ich } \left.\begin{array}{r} 8 \\ 10 \end{array}\right\} \text{ oder } 18$$

$$\left.\begin{array}{r} 7 \\ 8 \end{array}\right\} \quad 15 \text{ addire}$$

die Summe iſt 33 33.

89.

Aus dieſem Beiſpiel erhellet zugleich, daß es einerlei iſt, ob ich eine Reihe Zalen, die addiret werden ſollen, auf einmal addire, oder ob ich ſie in Partien theile, jede

Partie

Partie einzeln ſummire, und dann die Summen der Partien addire.

Z. E.	245	245	
	678	678	
	204	204	
			1127
	341	341	....
	524	524	....
	276	276	....
			1141
	437	437	....
	652	652	....
	785	785	....
	4142		1874
			4142

So pflegt mann es bei weitläufigen Rechnungen zu machen, wo die zu addirenden Poſten merere Seiten betragen. In dieſem Falle nennt mann das, was unten auf einer Seite herauskömmt, Latus; welches mann, um ſich deſto weniger zu irren, gleich oben auf die folgende Seite überträgt, da es denn der Tranſport heiſt. Z. B.

Erſte Seite.

Januar	Rthl.	Gr.	Pf.
d. 10ten	243	4	2
d. 20ſten	15	2	6
d. 25ſten	412	21	—
d. 28ſten	13	12	4
Latus	684	16	—

Zweite Seite.

Febr.	Rthl.	Gr.	Pf.
Transp	684	16	—
d. 1ſten	22	14	1
d. 5ten	115	20	—
d. 8ten	216	12	5
d. 12ten	256	8	5
Latus	1295	22	11

lezte Seite.

Febr.	Rthl.	Gr.	Pf.
Transp.	1295	22	11
d. 18ten	29	11	5
d. 20ſten	154	—	8
Summa	1479	11	—

90.

Gleiches von gleichem abgezogen, läßt gleiche Differenzen oder Reſte.

Z. E. es iſt einerlei

ob ich von	abziehe,	da denn bleibt
52	12	40
26	13	13
35	15	20
24	8	16
Summe 137	Summe 48	Summe 89

oder ob ich gleich

von der Summe 137
abziehe die Summe 48

da denn wie vorher 89 bleibt.

91.

Auf dieſe Art machen es Kaufleute, oder andere Perſonen, die in beſtändiger Rechnung und Gegenrechnung mit einander ſtehn. Sie ziehn nicht alle Tage einzeln ab, was einer dem andern bezalet, ſondern halten etwa alle halbe Jar, oder alle Jar einen Abſchluß der Rechnung. Dabei wird alles, was der erſte von dem andern zu fodern hat, auf die eine, und was der erſte dem andern ſchuldig iſt, auf die andre Seite geſezt; am Ende werden die Summen von einander abgezogen. Z. B.

Herr

Herr J. J. Puff in Hamburg Soll haben

1779	Rthl.	Gr.	Pf.
den 22. Mai für 100 Cntr. Caffee à 17 Rthl.	1700	—	—
den 31. für 25 Cntr. Zuker à 23 Rthl.	575	—	—
den 8. Jun. für mich gezalt an Hrn. van der Aa in Amſterdam	264	12	—
den 8. Jul. 1 Fäßchen neue Heringe	5	8	—
den 9. Aug. 75 Pfund Hamburger Rindfleiſch à 2 Gr.	6	6	—
den 5 Sept. $1\frac{1}{2}$ Centn. Candiszuker à 21 Rthl.	31	12	—
den 8. Octob. $\frac{3}{4}$ Centn. feinen Theebou à 330 Rthl.	247	12	—
den 12 Nov. gezalt an Hrn. Bohn in Hamburg auf meine Anweiſung	55	16	—
den 9. Dec. ein Fäßchen Auſtern	25	—	—
Summa	2910	18	—
davon abgezogen	1796	7	8
behält Hr. Puff gut	1114	10	4

Herr J. J. Puff in Hamburg Hat bekommen

1779	Rthl.	Gr.	Pf.
den 18. Mai ſandte an denſelben mit der Poſt	245	12	—
den 15 Jun. zalte für denſelben an Hrn. Freege in Leipzig	385	18	—
den 30. ejusd. ſandte an denſelben eine Kiſte Berliner Porcellan	268	16	—
den 12. Jul. zalte auf deſſen Ordre an Hrn. Bethmann in Frankfurt am Mayn	385	—	—
den 15. Aug. an den Fuhrmann Sachſe für Fracht	125	—	—
den 5 Oct. laut Aſſignation an Hrn. Gründler	212	—	—
den 8. Nov. eine Kiſte Bücher, betrug laut Specification incl. Emballage und Speſen	163	12	—
an verſchiedenen Porto - und andern Auslagen laut Specification	10	21	8
Summa	1796	7	8

Anm. Anſtatt Soll haben — Hat bekommen, ſchreibt mann auch *Credit* — *Debet*, oder Gut — Schuld.

92.

Auf gleiche Weiſe berechnet mann Einname und Ausgabe; indem mann entweder beide nach Monaten, oder unter gewiſſen Titeln, jede beſonders auffüret; die Summen der Titel oder Monate nachher beiderſeits addiret, und zulezt das Kleinere von dem Gröſſern abzieht. Dieſes lezte pflegt mann in Rechnungen die Balanz (la balance) zu nennen; welches eigentlich das Gleichgewicht der Wage bedeutet.

93.

Mann kann die Richtigkeit der Addition auf verſchiedne Art probiren.

1) Wenn mann eine Reihe Zalen, die mann von unten herauf addiret, noch einmal von oben herunter addiret. Bekömmt mann beidemal gleiche Summen, ſo kann mann ſicher ſein, daß mann recht gerechnet. Denn es iſt gar nicht zu erwarten, daß mann in beiden Fällen gerade den nemlichen Feler ſolle gemacht haben.

2) Wenn mann von der Summe die einzelnen Säze nach und nach wieder ſubtrahiret. Bleibt am Ende nichts übrig, ſo iſt die Addition richtig geweſen.

Z. B.

259	Probe.	1917	Summe
346		259	ſubtr.
589		1658	
723		346	ſubtr.
1917 Summe		1312	
		589	ſubtr.
		723	
		723	ſubtr.
		0	

3) Wenn mann in den ſummirenden Zalen ſo vielmal 9 wegwirft, als mann kann, und ſich den Ueberſchuß merket; hiernächſt in der Summe es eben ſo macht; ſo iſt die Rechnung richtig, wenn der Ueberſchuß aus der Summe dem Ueberſchuß aus den ſummirenden Zalen gleich iſt.

Z. B. im vorigen Exempel: in den ſummirenden Zalen in der oberſten Reihe 9 iſt 9; 5 und 2 iſt 7, dazu aus der zweiten Reihe 3, macht 10; bleibt 1 über 9; dieſe 1 zu 4 macht 5, und 6 dazu iſt 11; macht 2 über 9; ferner dieſe 2 und 5 iſt 7, und 8 iſt 15, macht 6 über 9; (die dabeiſtehende 9 wird für ſich ausgeſtrichen) die 6 im Sinn und 3 in der unterſten Reihe macht 9; 7 und 2 macht auch 9; bleibt alſo nichts übrig.

Eben ſo in der Summe: 9 iſt 9; 7 und 1 und 1 macht auch 9, ſo daß ebenfals nichts übrig bleibt.

Dieſe Probe heiſt die Neunerprobe; und ſie iſt, ſo wie ſie hier beſchrieben worden, hinlänglich, wenn mann

 nicht

nicht gerade mit Fleis immer um neun gefelet hat. Z. E. wenn jemand

aus 725
358
659 unrichtig

die Summe 1740, die doch 1742 heiſen ſollte, herausbrächte, ſo würden, wenn er in den ſummirenden Zalen alles zu 9 machte, 5 übrig bleiben; in der Summe hingegen nur 3; und alſo dadurch der Feler verraten werden.

Wenn hingegen einer aus

584
257

die falſche Summe 922 brächte; ſo träfe zwar die Neunerprobe zu; aber das Exempel wäre doch falſch gerechnet. Dieſen Feler kann mann aber bei der Neunerprobe vermeiden, wenn mann ſie ſo anſtellt, daß mann bei den ſummirenden Zalen merkt, wie oft mann 9 weggeworfen, und was übrig bleibt; eben ſo bei der Summe, wie oft mann 9 beim Summiren weggeworfen, die mann in der Summe nicht geſchrieben hat; hiezu, wie oft mann aus der Summe, ſo wie ſie da geſchrieben ſteht, 9 wegwerfen kann; und endlich was denn über 9 bleibt. Alsdenn muß die Probe in allen Fällen beweiſen, daß mann richtig gerechnet, wenn beiderſeits in den ſummirenden Zalen, und in der Summe gleich vielmal 9 weggeworfen worden, und dazu auf beiden Seiten gleich viel übrig bleibt.

Z. E.

Z. E. 548
359
785

1692

Indem ich hier rechnete, 5 zu 9 iſt 14, und 8 iſt 22, habe ich zweimal 9 weggeworfen, die ich in die Summe nicht ſchreibe, weil ich nur 2 unterſchreibe; indem ich ferner ſage, 8 und 2 im Sinn iſt 10, und 5 iſt 15, und 4 iſt 19, habe ich einmal 9 weggeworfen, indem ich nur einmal 9 unterſchreibe, und doch in 19 zweimal 9 enthalten ſind; endlich indem ich ſage, 7 und 1 im Sinn iſt 8, und 3 iſt 11, und 5 iſt 16, habe ich auch einmal 9 weggeworfen, indem ich 16 unterſchreibe. Beim Summiren habe ich alſo 4mal 9 weggeworfen, und in der Summe 1692 ſelbſt auch noch 2mal; zuſammen alſo 6mal, ſo daß nichts übrig bleibt. Eben ſo vielmal läßt ſich auch 9 aus den ſummirenden Zalen wegwerfen, ſo daß auch nichts übrig bleibt. Das Exempel iſt alſo richtig gerechnet.

Wenn mann nun das vorher angegebne falſch gerechnete Exempel

584
257

922

hiernach probirt, ſo entdekt es ſich, daß es falſch gerechnet worden. Denn in der Summe ſelbſt ſtekt einmal 9 und dreimal wäre 9 beim Addiren weggeworfen; alſo zuſammen 4mal 9 weggeworfen, ſo daß 4 übrig bleiben. Hingegen in den ſummirenden Zalen kann mann nur 3mal 9 wegwerfen, ſo daß 4 übrig bleiben.

Dieſe Neunerprobe iſt indeſſen ſer weitläuftig, ſo wie die zweite; mann thut daher am beſten, wenn mann ſich an die erſte hält.

94.

Die Subtraction wird probiret, indem mann die Differenz, oder den Reſt, wieder zu der abgezognen Zal addiret; kömmt auf ſolche Weiſe das Ganze wieder heraus, ſo hat mann richtig ſubtrahiret.

Z. E.	25007897	
add.	11248635	ſubtr.
	13759262	Reſt
	25007897	wie oben.

Anm. Hier muß die Uebung Münzſorten, Maſe und d. gl. zu ſubtrahiren nach §. 44 - 46. wiederholet werden.

VII.

Von der Addition und Subtraction durch allgemeine Zeichen.

95.

Das Zeichen = bedeutet, daß zwei Zalen oder andre Dinge einander gleich ſind.

Z. E. 5 = 5 heiſt, 5 iſt gleich 5.

96.

Das Zeichen + bedeutet, daß zwei Zalen oder Dinge addirt werden ſollen.

Z. E. 5 + 8 heiſt 5 und 8, oder 5 plus 8.

3 + 4 + 7 = 14 heiſt: drei plus 4, plus 7 iſt gleich 14.

3 Gr. + 4 Gr. + 9 Gr. = 16 Gr. heiſt: drei Groſchen und vier Groſchen und 9 Groſchen macht 16 Gr.

97.

Das Zeichen — bedeutet, daß die Zal, oder dasjenige überhaupt, vor welchem es geſezt wird, abgezogen werden ſolle.

Z. E. 8 — 3 heiſt acht weniger 3, oder acht minus drei; das heiſt 3 von 8 abgezogen. 8 — 3 = 5 heiſt acht weniger drei iſt gleich fünf.

98.

Wenn ich auf dieſe Art einen Apfel und eine Birne zuſammengenommen ausdrüken ſollte, ſo würde ich das ſchreiben:

Apfel + Birne.

Und wenn ich drei Aepfel und 2 Birnen zuſammengenommen ausdrüken ſollte, ſo würde ich ſchreiben:

3 Aepfel + 2 Birnen.

Und wenn nun a einen Apfel, und b eine Birne bedeuten ſollte, ſo würde ich

im erſten Falle ſchreiben $a + b$
und im zweiten $3a + 2b$

99.

Eben ſo, wenn ich anzeigen wollte, daß einer einen Apfel bekommen, aber dafür eine Birne hergeben, d. h. ſich abziehn laſſen ſollte, ſo würde ich das ſchreiben:

Apfel

Apfel — Birne;

ſollte er aber Aepfel bekommen, und vier Birnen hergeben, ſo würde ich das ſo ſchreiben:

3 Aepfel — 4 Birnen;

und wenn a wieder einen Apfel, und b eine Birne bedeutete, ſo würde ich

im erſten Falle a — b

im zweiten 3 a — 4 b ſchreiben.

100.

Es können aber dieſe Buchſtaben a und b, auch ſo die übrigen c, d, oder x, y, z, alles bedeuten, was mann ſie bedeuten laſſen will.

Es kann z. E. a und b eben ſo gut einen Aal und einen Barſch, als einen Apfel und eine Birne bedeuten.

Mann kann ſich unter a, b, c, Thaler, Groſchen und Pfennige vorſtellen.

Auch können dieſe Buchſtaben alle Zalen vorſtellen. Wenn ich will, kann ich mir bei a 1000, bei b 100, bei c 10 gedenken. Ich kann mir aber eben ſowol bei a 12, bei b 16, bei c 20 vorſtellen.

Daher heiſſen dieſe Buchſtaben allgemeine Zeichen, da hingegen die Ziffern einzelne Zeichen ſind, die nur eine einzige Bedeutung haben. Z. E. 4 allein geſezt, bedeutet auf der Welt nichts anders als 2 + 2.

101.

Mann wird nun leicht verſtehn, was folgende Säze ſagen wollen:

1) $a + b + 2a + 2b = 3a + 3b$.

2) $a + 2b + 3c + a + b = 2a + 3b + 3c$.

3) $a + 5a + z + 4p = 6a + z + 4p$.

Denn

Denn geſezt, daß im erſten Saze a Aepfel und b Birnen hieß; ſo würde er ſo lauten:

Ein Apfel, und eine Birne, und 2 Aepfel und 2 Birnen, iſt ſo viel als drei Aepfel und drei Birnen.

Wenn im zweiten Saze a Aprikoſen, b Birnen und c Citronen bedeutete, ſo würde ich ihn ſo überſezen müſſen:

Ein Apfel und zwei Birnen und 3 Citronen, und noch ein Apfel und noch eine Birne, machen zuſammen 2 Aepfel, drei Birnen und 3 Citronen. u. ſ. w.

102.

Nicht minder müſſen Säze, wie folgende, verſtändlich ſein.

1) $6a - 3a + 2b - b = 3a + b$.

2) $6x - 3b + 2b + 4b - 4a = 6x + 3b - 4a$.

3) $5a - a + 6b - c + 3c = 4a + 6b + 2c$.

103.

Weil nun Addiren und Subtrahiren einander gerade entgegengeſezt ſind, wie Geben und Nemen, ſo daß, wenn ich 1 addire und 1 ſubtrahire, nichts übrig bleibt, ſo wird das Zeichen der Addition + oder plus, und das Zeichen der Subtraction — oder minus auch gebraucht, um überhaupt ſolche Zalen und andre Gröſen anzudeuten, die einander entgegengeſezt ſind, ſo daß eine die andre aufhebt. Dergleichen ſind nun

1) Einname und Ausgabe.

Wenn ich 54 Rthlr. Einname und 22 Rthlr. Ausgabe ſchreiben will, ſo kann ich das auch ſo ausdrüken:

+ 54

\+ 54 Rthlr. — 22 Rthlr. oder umgekert

— 54 Rthlr. + 22 Rthlr.

Geſezt daß einer 25 Rthlr. und 30 Rthlr. eingenommen, darauf 35 und 8 Rthlr. ausgegeben; denn 18 Rthlr. und 5 Rthlr. und 12 Rthlr. eingenommen, und 27 Rthlr. und 10 Rthlr. ausgegeben, ſo kann dis, wenn die Einname mit + und die Ausgabe mit — ausgedrükt wird, ſo geſchrieben werden:

25 + 30 — 35 — 8 + 18 + 5 + 12 — 27 — 10.

2) Schulden und Vermögen. Auch dieſe ſind einander gerade entgegengeſezt. Hat einer 100 Rthlr. im Vermögen und iſt auch 100 Rthlr. ſchuldig, ſo hat er eigentlich gar nichts.

Wenn ich alſo das Vermögen durch + und die Schulden durch — bezeichne; ſo frägt ſichs, wie folgender Saz zu leſen ſei.

210 — 100 + 64 — 150 + 69 — 55 — 27 Rthlr.

3) Vorwärts gehn und rükwärts gehn. Wenn einer von A ausgeht, und nachdem er fünf Schritte bis in B vorwärts gegangen, eben ſo viel wieder zurükgeht, ſo iſt es eben ſo viel, als wenn er gar nicht aus der Stelle gekommen wäre. Daher, wenn ich die Schritte vorwärts mit + bezeichne, ſo muß ich die Schritte rükwärts mit — bezeichnen.

Dieſer Saz alſo:

Tab. II. Fig. 17. Es ging einer von A aus 8 Schritte vor- und 3 rükwärts, wieder 10 vor- und 8 rükwärts, wieder 5 vor- und 10 rükwärts; kann ſo ausgedrükt werden:

8 — 3 + 10 — 8 + 5 — 10.

4) Stei-

4) Steigen und Fallen, oder Hinaufſteigen und Herabſteigen.

Wenn jemand auf einer Leiter 3 Sproſſen hinauf, 2 herunter, 4 Sproſſen hinauf, 3 herunter, 7 hinauf und 4 herunter ſteigt, ſo kann dis ſo ausgedrükt werden:

$3 - 2 + 4 - 3 + 7 - 4.$

5) Behalten und Vergeſſen, oder Zulernen und Verlernen.

Wenn ein Schüler anfängt lateiniſch zu lernen, und im erſten Monate 430 Wörter lernt, im 2ten 220 lernt und 300 vergißt, im 3ten 450 lernt und 210 vergißt, im 4ten nichts zulernt, aber 320 vergißt, im 5ten 600 zulernt und 290 vergißt, im 6ten 425 zulernt, und 227 vergißt, ſo kann mann dis ſo ausdrüken:

$430 + 220 - 300 + 450 - 210 - 320 + 600 - 290 + 425 - 227.$

104.

Wenn mann nun Gröſen, die mit Buchſtaben ausgedrükt ſind, addiren ſoll, ſo ſind ſie entweder Gröſen von einerlei Benennung, oder nicht.

Wenn ſie nicht von einerlei Benennung ſind, ſo kann mann, ſie mögen einander entgegengeſezt ſein, oder nicht, weiter nichts thun, als ſie blos mit ihren Zeichen + und — hinter einander herſchreiben.

Z. B. wenn

$+ 6a$	oder $- 6a$	oder $- 6a$
$+ 4b$	$+ 4b$	$- 4b$
$+ 3c$	$- 3c$	$- 3c$

addiret werden ſollen, ſo kann mann weiter nichts thun

als den erſten Fall ſo: $6a + 4b + 3c$

den zweiten ſo: $- 6a + 4b - 3c$

den dritten ſo: $- 6a - 4b - 3c$

ſchreiben.

Denn

Denn geſezt + bedeutete hier geſchenkt, und — geſtolen; a bedeutete Pferde, b Eſel, und c Ochſen; ſo ſollte ich in dem erſten Falle

6 geſchenkte Pferde
4 ſ ſ Eſel
3 ſ ſ Ochſen

addiren. Da iſt nun offenbar, daß ich weiter nichts thun konnte, als ſie, ſo wie ſie daſtehn, zuſammennemen oder hintereinander her ſchreiben:

6 geſchenkte Pferde, und 4 geſchenkte Eſel, und 3 geſchenkte Ochſen.

Im zweiten Falle müſte ich ebenfals mich begnügen, zu ſagen:

6 geſtolne Pferde, und 4 geſchenkte Eſel, und 3 geſtolne Ochſen.

Im dritten Falle iſt es eben ſo. Und es iſt alſo klar genug, daß wenn die mit Buchſtaben ausgedrükten Gröſen nicht von einerlei Benennung, alſo auch nicht von einerlei Art ſind, mann ſie anders nicht addiren könne, als ſo, daß mann ſie mit ihren Zeichen hinter einander her ſchreibt.

105.

Wenn aber Gröſen von einerlei Benennung vorhanden ſind, ſo ſind ſie entweder einander entgegengeſezt, oder nicht.

Im lezten Falle, wenn ſie einander nicht entgegengeſezt ſind, alſo einerlei Zeichen haben, werden die dabeiſtehenden Ziffern ordentlich addirt.

Z. E.	$+ 6a$		$- 6a$
	$+ 3a$		$- 3a$
	$+ 4a$		$- 4a$
Summe	$+ 13a$	Summe	$- 13a$

Denn

Denn wenn a wieder Pferde bedeutet, ſo iſt eben ſo gewiß, daß 6 und 3 und 4 geſchenkte Pferde eben ſowol 13 geſchenkte Pferde ausmachen, als daß 6 und 3 und 4 geſtolne Pferde zuſammen 13 geſtolne Pferde ſind.

Hingegen im erſten Falle, wenn Gröſen von einerlei Art und Benennung verſchiedne Zeichen haben, muß mann erſt die, welche + haben, dann die, welche — haben, zuſammenrechnen; alsdann die kleinre Summe von der gröſſern abziehn, und dem Reſte das Zeichen der gröſſern geben.

Exempel. Mann ſoll

$$3a + 4a + 6a$$

und $-2a - a - 4a$

addiren.

Mann rechnet alſo erſt die a, welche + haben, zuſammen, dieſe betragen 13 a.

Hiernächſt rechnet mann die, welche — haben, zuſammen, dieſe betragen 7 a.

Nunmer zieht mann

von + 13 a

die — 7 a

ab; ſo bleiben + 6 a

Es iſt alſo $+13a - 7a = +6a$.

Um ſich dieſes noch deutlicher zu machen, ſeze mann ſtatt a Thaler; und neme an, daß + hier gewonnen, und — verſpielt heiſe.

Es gewinnt alſo jemand 3 Rthl. und 4 Rthl. und 6 Thaler; darauf verliert er wieder 2 Rthl. 1 Rthl. und 4 Rthl. Nun will er Gewinn und Verluſt zuſammenrechnen. Er muß alſo erſtlich die gewonnenen Thaler,

ler, 3, 4 und 6, in eins bringen; ſie machen 13 Rthl. Hiernächſt die verlornen Thaler; ſie betragen 7 Rthl. Wenn er nun 13 gewonnene Thaler und 7 verlorne Thaler zuſammen rechnen will, kann ers wol anders anfangen, als daß er das Kleinere 7 von dem Gröſſern 13 abzieht, und ſagt: ſieben Thaler verloren, von 13 Thalern gewonnen, bleiben 6 Rthlr. gewonnen?

106.

Mann wird nun auch vermiſchte Exempel addiren können; als:

$$
\begin{array}{l}
4a + 2b - 3a + 4b - c \\
2a + 3c - 2b + 4c - b \\
\hline
6a - 3a + 6b - 3b + 7c - c.
\end{array}
$$

D. i. $3a + 3b + 6c.$

Wenn nun a Thaler, b Groſchen und c Pfennige hieſen, ſo würde die Summe ſein

6 Rthl. — 3 Rthl. + 6 Gr. — 3 Gr. + 7 Pf. — 1 Pf.

d. i. 3 Rthl. + 3 Gr. + 6 Pf.

Eben dis käme auf folgende Art heraus.

Gewinn.			Verluſt.		
Rthl.	Gr.	Pf.	Rthl.	Gr.	Pf.
4	—	—	3	—	—
—	2	—	—	—	1
—	4	—	—	2	—
2	—	—	—	1	—
—	—	3	3 Rthlr.	3 Gr.	1 Pf.
—	—	4			
6 Rthlr.	6 Gr.	7 Pf.			

	6 Rthlr.	6 Gr.	7 Pf.
	3 Rthlr.	3 Gr.	1 Pf. abgezogen
bleibt	3 Rthlr.	3 Gr.	6 Pf.

Ein

Ein andres Beiſpiel.

$$\begin{array}{r} 3a - 20b + 3c - d \\ 2a + 21b - 6c + e \\ \hline 5a + b - 3c - d + e. \end{array}$$

oder in Münzſorten ausgedrükt:

3 Louis d'or	— 20 Rthl.	+ 3 Gr.	— 1 Pf.	
2 Louis d'or	+ 21 Rthl.	— 6 Gr.	+ 1 Heller	
5 Louisſd'or	+ 1 Rthl.	— 3 Gr.	— 1 Pf.	+ 1 Hell.

Das obige Exempel §. 103. n. 3. kann nun ebenfalls addiret werden.

$$\begin{array}{r} +8-3 \\ +10-8 \\ +5-10 \\ \hline +23-21=2. \end{array}$$

Der oben beſchriebene Fusgänger iſt alſo nur zwei Schritt vorwärts gekommen; wie Tab. II. Fig. 17. zeigt.

107.

Wenn mann Gröſen, die mit allgemeinen Zeichen als Buchſtaben ausgedrükt ſind, von einander ſubtrahiren ſoll, ſo ſind beide entweder von einerlei Benennung und einander nicht entgegengeſezt; oder ſie haben einerlei Benennung und ſind einander entgegengeſezt; oder ſie haben verſchiedene Benennungen, in welchem Falle ſie entweder entgegengeſezte Zeichen haben oder nicht.

108.

Erſter Fall. Wenn eine Gröſe von der andern abgezogen werden ſoll, die mit ihr von einerlei Art iſt, auch ihr nicht entgegengeſezt iſt.

In dieſem Falle geſchieht die Subtraction wie bei den Ziffern gewönlich iſt.

Von + 6 a	Von — 6 b
abgezogen + 3 a	abgezogen — 2 b
bleibt + 3 a	bleibt — 4 b

109.

Zweiter Fall. Wenn die Gröſen einander bei gleichen Benennungen entgegengeſezt ſind, und eine von der andern abgezogen werden ſoll.

Hier iſt die abzuziehende Gröſe entweder + oder —.

Wenn ein + abgezogen werden ſoll, ſo iſt das eben ſo viel als: ein — ſoll addiret werden. Denn einen Gewinſt abziehen iſt eben ſo viel als einen Verluſt zuſezen.

Wenn ein — abgezogen werden ſoll, ſo iſt das eben ſo viel als: ein + ſoll addiret werden. Denn jemanden einen Verluſt abziehn oder erſparen, heiſt eben ſo viel, als ihm einen Gewinſt zuziehn, oder verſchaffen.

Alſo wenn mann bei entgegengeſezten Zeichen Gröſen von einerlei Benennung von einander abziehn ſoll; ſo iſt die Regel:

Mann verwechsle die Zeichen in der abzuziehenden Zal, mache aus + umgekert —, und wo — ſteht, ſeze mann +; hierauf addire mann; und was herauskömmt, iſt der geſuchte Reſt. Z. E.

$$\begin{array}{l} 4\,a + 2\,b - 3\,c + 5\,d \\ -a - 3\,b + 4\,c - 4\,d \text{ ſubtr.} \\ +\quad +\quad -\quad + \\ \hline +5\,a + 5\,b - 7\,c + 9\,d \end{array}$$

110.

Mann kann die Regel für den zweiten Fall, auch auf den erſten §. 108. anwenden. Denn auch alsdenn, wenn

wenn die mit einerlei Buchſtaben ausgedrükten Gröſen, einander nicht entgegengeſezt ſind, wird mann richtig ſubtrahiren, wenn mann die Zeichen in der abzuziehenden Zal mit den entgegengeſezten verwechſelt und alsdenn addiret.

Die §. 108. angefürten Exempel zum erſten Falle waren

$+6a$	$-6b$
$+3a$ ſubtr.	$-2b$ ſubtr.
$+3a$	$-4b.$

Eben dis kommt heraus, wenn mann in der zu ſubtrahirenden Zal die Zeichen verwechſelt und ſodann addiret.

$+6a$	$-6b$
$-3a$ add.	$+2b$ add.
$+3a$	$-4b.$

III.

Der dritte Fall bei dieſer Subtraction iſt, wenn die abzuziehende Gröſe, und die, von welcher abgezogen werden ſoll, nicht einerlei Benennung hat, d. i. mit andern Worten, wenn beide nicht von einerlei Art ſind.

In dieſem Falle kann mann nichts anders thun, als daß mann, wie vorher, in der abzuziehenden Gröſe die Zeichen verwechſelt.

Z. E.

$a-b$	$-a+b$
$-c+d$ ſubtr.	$-c+d$
$+\quad-$	$+\quad-$
$a-b+c-d$	$-a+b+c-d.$

112.

Es iſt alſo die allgemeine Regel in allen Fällen bei dieſer Subtraction, daß mann in der abzuziehenden Gröſe die Zeichen + und — in die entgegengeſezten verwandle, und alsdenn addire. §. 109.

113.

Die Richtigkeit dieſer Regel ergibt ſich auch daraus, weil, wenn mann den ſolchergeſtalt gefundnen Reſt wieder zu der abzuziehenden Gröſe addiret, das Ganze wieder herauskömmt. Und dis war die Probe der Subtraction. §. 94.

Exempel.

$+3a+4b$	$4a-6b$
$+a+2b$ ſubtr.	$-2a+4b$ ſubtr.
D. i.	D. i.
$+3a+4b$	$4a-6b$
$-a-2b$ add.	$+2a-4b$ add.
$+2a+2b$ Differenz	$6a-10b$ Differenz
$+a+2b$ abzuziehende Zal wieder addirt	$-2a+4b$ abzuziehende Gröſe wieder addirt
$+3a+4b$ kömmt das Ganze wieder heraus.	$4a-6b$ kömmt das Ganze wieder heraus.

114.

Mann kann nun auch vermiſchte Beiſpiele rechnen.

Als:

Als:

$$\begin{array}{l} 4a - 3b + 6c - 4d \\ -3c + 4a - 4b + 5e \text{ ſubtr.} \\ \;\; + \quad - \quad + \quad - \\ \hline b + 9c - 4d - 5e. \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l} 5a + 2y - 4x + z \\ -2a + y - 2x - b \text{ ſubtr.} \\ \;\; + \quad - \quad + \quad + \\ \hline 7a + y - 2x + z + b. \end{array}$$

115.

Wenn mann eine Gröſe, von der eine andre abgezogen werden ſoll, zuſammen von einer dritten abzuziehn hat, ſo darf mann nur die erſte ganz abziehn, und die zweite addiren.

Z. E. von + 8 a

ſoll + 5 a — 2 a abgezogen werden

$$\begin{array}{ll} & - \quad + \\ \hline \text{bleibt} & +3a + 2a \end{array}$$

Hier iſt aber nichts anders geſchehn, als daß mann 5 a ganz von 8 a abgezogen, und 2 a wieder dazu addirt hat.

Wenn ich von 8 Rthl. abziehn ſoll 5 Thaler, weniger zwei Thaler; ſo ſind 5 Thaler weniger zwei Thaler, drei Thaler; alſo drei Thaler von 8 Rthl. abgezogen, bleiben 5 Rthl. Aber eben das wäre herausgekommen, wenn ich 5 von 8 ganz abgezogen, und 2 wieder dazu addirt hätte.

Es iſt alſo allemal

$$a - (b - c) = a - b + c$$

Die Klammern zeigen an, daß b — c zuſammengehört, und weil — davor ſteht, auch zuſammen von a abgezogen werden ſoll.

Alſo iſt $5 - (2 - 1) = 5 - 2 + 1$
$10 - (3 - 2) = 10 - 3 + 2$
$9 - (5 - 3) = 9 - 5 + 3$ u. ſ. w.

116.

Unter zwei entgegengeſezten Gröſen heiſt die eine, welche mit + bezeichnet wird, bejahend oder poſitiv, die andre verneinend oder negativ.

Es iſt aber gleichviel, welche von beiden entgegengeſezten Gröſen ich mit + bezeichnen und poſitiv nennen, oder mit — bezeichnen und negativ nennen will.

Nenne ich Vermögen poſitiv, ſo ſind Schulden negativ. Nenne ich Ausgabe negativ, ſo iſt Einname poſitiv u. ſ. f.

Ich kann aber auch eben ſowol die Schulden poſitiv und das Vermögen negativ; die Einname negativ, und die Ausgabe poſitiv nennen.

Doch hat mann in einigen Fällen mer Grund für das eine als das andre.

Es iſt z. E. bequemer, das Vermögen, die Einname, das Zulernen poſitiv, und hingegen die Schulden, die Ausgabe, das Verlernen, negativ zu nennen.

117.

Im Anfange einer Reihe läßt mann bei der poſitiven Gröſe das Zeichen + weg, weil mann es von ſelbſt verſtehen kann.

Z. E. mann ſchreibt $a - b + c$
nicht $+a - b + c$.
Eben ſo ſchreibt mann $x + y - z$
nicht $+x + y - z$.

118.

Mann läßt auch, wenn von einer gewiſſen Gröſe nur 1 da iſt, die 1 weg, und ſchreibt blos den Buchſtaben. Mann ſchreibt z. E.

nicht $1a + 1b - 2c + 1d$
ſondern $a + b - 2c + d$

weil es ſich von ſelbſt verſteht, daß a, b, d, nur 1 a, 1 b, 1 d ſein ſoll.

119.

Fragen zur Wiederholung des bisherigen:

1. Wie heiſen die Gröſen, von denen eine die andre aufhebt?
2. Was ſind entgegengeſezte Gröſen?
3. Wie werden die Zeichen + und — lateiniſch und deutſch ausgeſprochen?
4. Wie nennt mann die eine und die andre von zwei entgegengeſezten Gröſen?
5. Was bedeutet $a + b$?
6. Was bedeutet $a - b$?
7. Was kann ich mir unter a und b alles vorſtellen?
8. Iſt das einerlei, einem $+ 3a$ abziehn, und $- 3a$ zuſezen?
9. Iſt das einerlei, einem 3 Thaler nemen, oder einem den Mangel von 3 Thalern geben?
10. Iſt das gleichviel, ob ich einem $- 3a$ abziehe oder $+ 3a$ zuſeze?
11. Iſt das gleichviel, ob ich 3 Rthl. Schulden für einen bezale, oder ihm 3 Rthl. ſchenke?

12. Wie muß manns anfangen, wenn mann zu 4 a — 3 b addiren ſoll — 2 a + 4 b?

13. Wie muß manns anfangen, wenn mann von 4 a — 3 b ſubtrahiren ſoll — 2 a + 4 b?

120.

Mann wird leicht einſehn, daß mann bei dieſer Art mit Buchſtaben zu rechnen, anfangen kann wo mann will, zur rechten oder linken Hand.

Denn es iſt hier nicht wie bei den Ziffern; wo immer die nächſte Ziffer zur linken Hand zehnmal ſo viel bedeutet, als wenn ſie eine Stelle weiter zurük nach der rechten Hand ſtünde.

Vielmer iſt hier 3 a nicht mer und nicht weniger, es mag vorn, in der Mitte oder hinten ſtehn.

Z. B. a + 3 b — 4 c
— c + 4 a + 2 b add.

Hier neme ich 4 a wenn es gleich in der Mitte ſteht, mit a zuſammen; — c das vorn ſteht, mit 4 — c das zulezt ſteht, u. ſ. w., ſo daß die Summe iſt:

5 a + 5 b — 5 c

welches ich aber auch ſo ſchreiben könnte:

5 b + 5 a — 5 c.

121.

Es iſt auch nun nicht ſchwer zu begreifen, wie mann von dem Kleinern etwas Gröſſers abziehn könne.

Z. E. es ſoll von + 12 a
abgezogen werden + 20 a
—

ſo bleibt — 8 a

Denn wenn einer der nur 12 Rthl. hat, 20 Rthl. bezalen ſoll; muß er nicht 8 Rthl. Schulden machen?

122.

Hieraus erhellet aber auch zugleich, daß es bei der Subtraction nicht gleichviel iſt, welche Zalen oder Gröſen ich zuerſt und zulezt; oder vor und hinter das Zeichen — ſeze.

Es iſt nemlich (a — b) etwas anders als (b — a) denn wenn a = 10 und b = 8 iſt,
ſo iſt (a — b) = (10 — 8) d. i. + 2.
Hingegen (b — a) = (8 — 10) d. i. — 2.

VIII.

Erſte Begriffe vom Verhältniſſe der geraden Linien und der Zirkel gegen einander.

123.

Gerade linien deken einander, wenn ſie gleich lang ſind.

Wenn ein ausgedentes Ding ſo auf das andre gelegt werden kann, daß keines von beiden ſichtbar iſt, mann mag das eine auf das andre, oder das andre auf das erſte legen; ſo ſagt mann, daß ſich beide deken.

124.

Wenn nun zwei gerade linien, die beide gleich lang ſind, mit ihren Endpunkten auf einander gelegt werden, ſo fallen ſie gänzlich über einander; und da ſie keine Breite haben, ſo müſſen ſie ſich notwendig einander deken.

Die Schärfen an den Blättern eines beſchnittnen Buches ſtellen gerade linien vor. Wenn mann nun merere ſolche Blätter zuſammenfaßt, und von oben her auf

das oberſte ſieht, ſo kann mann zwar die Schärfe des oberſten Blattes ſehn, aber nicht die von den darunter liegenden; und umgekert eben ſo.

125.

Mann kann eine jede gerade linie an jede andere gerade ſo anſezen, daß ſie beide zuſammen eine einzige gerade linie ausmachen.

Oder: Mann kann jede gerade linie ſo weit, als mann will, verlängern.

126.

Eine gerade linie, die durch eine andere gerade linie hindurchgehet, durchkreuzet dieſelbe nur in einem Punkte, und man ſagt von ſolchen linien, daß ſie ſich ſchneiden.

127.

Tab. III. Fig. 18. Der Punkt B, auf welchen eine linie A B zugeht, heiſt die Richtung derſelben.

128.

Eine gerade linie behält immer einerlei Richtung.

129.

Eine linie, die ihre Richtung beſtändig ändert, das heiſt, die alle Augenblike auf einen andern Punkt zugeht, heiſt eine krumme Linie. Eine ſolche linie beſchreibt z. B. ein Menſch, der ſeinem Schatten nachgeht.

130.

So viel krumme linien es auch gibt, ſo iſt doch zwiſchen zwei Punkten die gerade linie allemal die kürzeſte.

Wenn

Wenn mann einen Faden gerade ſo lang macht, als eine gerade linie, ſo daß ſeine Enden mit den Endpunkten der geraden linie A und B genau zuſammentreffen, ſo wird es auf keinen Fall angehn, den Faden ſo zu krümmen, daß er zugleich beide Endpunkte noch erreichen ſollte.

Hingegen wenn ein Faden E C D, der eine krumme linie vorſtellt, ſo gelegt wird, daß ſeine beiden Enden die Endpunkte der geraden linie C D erreichen, ſo muß mann ihn allemal verkürzen, und z. E. nur bis C E etwa nemen, wenn ſeine Enden nach der geraden linie auf beide Endpunkte treffen ſollen. Tab. III. Fig. 19.

131.

Zwiſchen zweien Punkten kann nur eine einzige gerade linie gezogen werden. Denn es iſt die gerade linie zwiſchen zweien Punkten die kürzeſte. §. 130. Nun kann aber die kürzeſte nur eine ſein.

132.

Durch zwei Endpunkte wird allemal eine gerade linie beſtimmt.

Das heiſt: wenn mann einem zwei Punkte angibt, ſo kann er nur einerlei linie dazwiſchen ziehn.

Oder wenn mann eine linie von einer gewiſſen länge haben will, ſo darf mann demjenigen, der ſie ziehn ſoll, nur ſagen, wo ſie anfangen und wo ſie aufhören ſoll; denn weiß er genug, und kann ſich weder in der Richtung, noch in der länge der linie irren.

Ein Gärtner darf zu ſeinem Lehrjungen nur ſagen: von dieſem Kirſchbaume bis zu jenem Apfelbaume dort, ziehe mir eine gerade Schnur; und nun iſt es unmöglich, wenn der Lehrjunge das wirklich thut, daß er die Linie anders oder länger ziehen ſollte, als es der Gärtner verlangt. Der Kirſchbaum und der Apfelbaum ſtellen hier die beiden Punkte vor, zwiſchen welchen die gerade Linie enthalten ſein ſoll.

Etwas beſtimmen heiſt hier ſo viel, als etwas das gemacht werden ſoll, ſo genau angeben, daß wenn mann ſich nach der Vorſchrift richtet, mann nichts anders als das verlangte herausbringen kann.

Wenn mann zu einem Schuſter ſagt: Macht ein par Schuh; ſo iſt das ſer unbeſtimmt; denn er kann vielerlei Schuh machen. Sagt eine Mannsperſon zu ihm: Macht mir ein par Schuh! ſo iſt das ſchon weniger unbeſtimmt; denn nun weiß der Schuſter doch wie gros er ſie machen ſoll. Aber noch iſt nicht beſtimmt, aus was für Leder, mit was für Abſäzen; wer nun alles das angibt was dazu gehört, um ein par Schuh gerade ſo und nicht anders machen zu können, der beſtimmt die Schuhe.

Alſo durch zwei Endpunkte wird alles angegeben, was dazu gehört, eine gerade linie gerade ſo und nicht anders machen zu können: das heiſt: durch zwei Endpunkte wird eine gerade linie beſtimmt.

133.

Durch zwei Punkte, ſie mögen angenommen werden, wo mann will, wird allemal die Richtung der geraden linie beſtimmt, die durch dieſe Punkte geht. Tab. III. Fig. 20.

Mann neme die Punkte A und B an. Durch dieſe geht die linie C D. Nun mag dieſe linie verlängert werden nach E oder F, ſo weit mann will, ſo werden alle

dieſe

dieſe långern linien immer nur mit CD eine gerade linie ausmachen. Machen ſie aber mit CD nur eine linie aus, ſo können ſie auch keine andre Richtung haben.

So bald ich aber eine andre linie als CD ziehn will, die eine andre Richtung haben ſoll, z. E. MN, ſo kann ſie zwar durch den einen von den angenomnen Punkten z. E. B gehn, aber unmöglich durch den andern.

Das heiſt: durch zwei Punkte wird die Richtung einer geraden linie beſtimmt.

134.

Gerade linien, die einerlei Richtung haben, haben auch einerlei lage.

Alſo wird durch zwei Punkte die lage einer geraden linie beſtimmt. §. 133.

Wenn mann angeben will, wie eine Heke der lage nach gezogen werden ſolle, oder wie eine Reihe Håuſer liegen ſollen, ſo darf mann nur zwei Ståbe abſteken, und eine linie danach ziehn. Hernach kann mann die Heke immer verlångern, und immer ein Haus nach dem andern anbauen. Die lage wird nun immer die nemliche bleiben.

135.

Eine linie iſt blos lang, aber nicht breit. Es verſteht ſich, daß mann hier eine eigentliche oder mathematiſche linie gedenken muß.

Denn die linien, wie ſie im gemeinen leben gebraucht werden, können oft nicht nur lang und breit, ſondern auch dike ſein.

Mann nennet nemlich im gemeinen leben oft die Körper, die mann nach der linie ſtellt, eine linie; z. E. wenn mann ſagt, eine linie Soldaten.

Oder

Oder mann nennt das, was mann ſtatt einer eigentlichen Linie als ein Zeichen derſelben braucht, eine Linie. Z. E. auf dem Felde eine ausgeſpannte Schnur, die freilich nicht blos lang, ſondern auch breit und dik iſt; nur daß mann hier an ihre Breite und Dike gar nicht denkt. Auf dem Papiere ſtellt mann eine ware mathematiſche Linie durch kleine Tröpfchen oder Pünktchen Tinte oder Tuſche vor, die mann mit einer Feder oder Reisfeder aufs Papier ſezt.

136.

Die Gränze iſt das Aeuſerſte an einem Dinge. Da nun an einer Linie nichts weiter das Aeuſerſte ſein kann, als ein Punkt, ſo hat auch eine Linie keine andre Gränzen, als Punkte.

137.

Die Linie iſt blos in die Länge ausgedent. Was aber in die Länge und Breite ausgedent iſt, heiſt eine Fläche.

Das Oberſte eines Spiegels, das Aeuſerſte eines Apfels, einer Kugel, heiſt eine Fläche. Ein Feld, in ſo fern es lang und breit iſt; ein Fluß, ein See, in ſo fern er lang und breit iſt, heiſt eine Fläche.

138.

Eine Fläche hat nicht blos Punkte, ſondern Linien zu Gränzen. Oder das Aeuſerſte einer Fläche iſt überall eine Linie. Oder eine Fläche iſt überall in Linien eingeſchloſſen. Mann mache die Anwendung ſelbſt auf die §. 137. gegebnen und auf andre Beiſpiele.

139.

139.

Eine Fläche iſt entweder ſo beſchaffen, daß mann in derſelben, wo mann will, gerade Linien ziehen kann; oder ſie iſt von der Art, daß mann nicht überall gerade Linien darinn ziehn kann. Jene heiſt eine **ebene Fläche**, dieſe aber eine **unebene**, oder **gekrümmte**.

Auf einem Spiegel, auf einem glattgehobelten Brete, auf einem ausgeſpannten Papiere, wie auf einem Reisbrete, kann ich überall, wo ich will, und durch was für Punkte ich will, eine gerade Linie ziehn. Lege ich einen Faden auf ein Spiegelglas oder glattgehobeltes Bret ſtraff an, ſo wird er allezeit eine gerade Linie bilden, ich mag ihn legen wie ich will. Alſo die Fläche eines Spiegels, eines glattgehobelten Bretes, eines auf dem Reisbret ausgeſpannten Papiers, iſt eine ebene Fläche.

Hingegen auf der äuſern Fläche eines Apfels, eines Bierglaſes, eines Faſſes, kann ich nicht ſo nach Belieben überall gerade Linien ziehn.

An einem Bierglaſe können zwar von oben nach unten zu gerade Linien gezogen werden. Allein wenn ich eine Linie nach der Quere um das Glas herum ziehn will, ſo wird eine ſolche Linie unfelbar krumm werden müſſen. Die Fläche eines ſolchen Glaſes iſt alſo eine unebene Fläche.

Wer wird zweifeln, daß die Reife, die um ein Faß herumgelegt ſind, krumm ſein? Nun ſtellen aber die Reife, in ſo fern ich nicht an ihre Breite und Dike gedenke, Linien vor, die um die Fläche des Faſſes herumgehn. So wie nun dieſe krumm ſind, ſo würden alle Linien, die ich um das Faß herumziehn wollte, krumm werden. Alſo kann ich nicht überall nach Belieben gerade Linien auf der Fläche des Faſſes ziehn. Es iſt alſo die Fläche des Faſſes eine unebene Fläche. Auf den Böden des Faſſes aber, ſo fern ſie glatt gehobelt ſind, laſſen ſich überall gerade Linien ziehn; und alſo iſt die äuſerſte Fläche derſelben eine ebene Fläche.

140.

Eine ebene Fläche nennt mann auch ſchlechtweg eine Ebene.

Weil nun die Berge und Hügel eine gekrümmte Oberfläche haben, ſo nennt mann die Gegenden, die nicht gebirgig ſind, ſondern gerade fortlaufen, auch Ebenen *).

141.

Oberfläche heiſt eigentlich die äuſerſte Fläche an einem Körper; und iſt von den innern Flächen, insbeſondre von den Durchſchnittsflächen, wol zu unterſcheiden.

An einer Citrone z. B. iſt die Fläche, an welcher mann, ſo lange ſie ganz iſt, auſen mit der Hand herumfärt, die Oberfläche. Schneide ich ſie aber mitten von einander, ſo bekomme ich die Durchſchnittsfläche zu ſehn.

Manche Leute nennen alle Flächen Oberflächen; es iſt aber nicht wol gethan.

142.

Da eine Fläche überall in Linien eingeſchloſſen iſt, ſo kann ſie in gerade, aber auch in krumme Linien eingeſchloſſen ſein.

Eine Fläche, die in gerade Linien eingeſchloſſen iſt, heiſt eine geradlinichte Fläche.

Eine Fläche, die in krumme Linien eingeſchloſſen iſt, heiſt eine krummlinichte Fläche.

143.

Mann muß eine geradlinichte Fläche nicht mit einer ebenen verwechſeln §. 142. 139.

*) Elementarw. 3 Th. S. 260.

144.

Wenn ſich ein Punkt A um einen andern Punkt C in gleicher Weite herumbewegt, bis er wieder an die vorige Stelle kömmt, ſo entſteht eine Cirkellinie, oder Kreis. Tab. III. Fig. 21.

145.

Der Punkt C, um welchen eine Cirkellinie oder Kreis beſchrieben worden, heiſt der Mittelpunkt (centrum); weil er von allen Punkten in der Cirkellinie gleich weit entfernt iſt.

146.

Die Fläche, welche in der Cirkellinie eingeſchloſſen iſt, heiſt eine Scheibe, oder eine Cirkelfläche (area circuli).

147.

Die Cirkellinie an und für ſich wird auch der Umkreis oder die Peripherie genennt (peripheria).

148.

Das Wort Cirkel ſelbſt wird bald für den Umkreis, bald für die Cirkelfläche geſezt.

149.

Die gerade Linie, welche vom Mittelpunkte an die Peripherie gezogen wird, heiſt ein Radius. (Radius) Tab. III. Fig. 21.

CB, CD, CE ſind Radii.

150.

Weil vom Mittelpunkte bis zu jedem Punkte der Peripherie gleich weit iſt §. 144. durch zwei Endpunkte

 aber

aber die länge einer geraden linie beſtimmt wird §. 132. ſo ſind alle Radii eines und eben deſſelben Cirkels einander gleich.

151.

Tab. III. Fig. 21. Ein jeder Theil der Peripherie heiſt ein Bogen (arcus).

ED, DB, BA ſind Bogen.

152.

Eine linie, welche von einem Punkte der Peripherie zum andern geht, heiſt eine Sehne (chorda).

Tab. III. Fig. 21. FG und HK ſind Sehnen.

153.

Eine linie, welche von einem Punkte der Peripherie zum andern, aber durch den Mittelpunkt geht, heiſt der Durchmeſſer oder Diameter.

Tab. III. Fig. 21. EG und OP ſind Diameter.

154.

Ein jeder Diameter beſteht demnach aus zweien Radiis. (Z. E. Fig. 21. beſteht der Durchmeſſer EG aus dem Radius EC und dem Radius CG.)

Nun iſt aber jeder Radius eines Cirkels dem andern gleich. §. 150.

Alſo iſts einerlei, ob mann ſagt, es iſt der Diameter zweien Radiis gleich; oder ob mann ſagt, er iſt gleich einem Radius zweimal genommen.

Wenn

Wenn ein Ding ſo gros iſt, als ein andres zweimal genommen, ſo iſt es noch einmal ſo gros als dieſes andre.

Der Durchmeſſer oder Diameter iſt alſo noch einmal ſo gros, als der Radius.

155.

Demnach iſt auch der Radius eines Cirkels nur halb ſo gros, als der Diameter, und wird daher auch der Halbmeſſer genannt.

156.

Ein jeder Cirkel wird in 360 gleiche Theile eingetheilet. Einen ſolchen 360ſten Theil eines Cirkels nennt mann einen Grad. Alſo hat jeder Cirkel 360 Grade. Bei einem groſen Cirkel ſind die Grade gros, bei einem kleinen ſind ſie klein.

157.

Ein ebener Winkel, den mann auch ſchlechtweg einen Winkel nennt (angulus) iſt die Neigung zweier geraden linien gegen einander in einem Punkte, wie ABC.

158.

Die linien ſelbſt, welche ſich ſo gegen einander neigen, daß ſie einen Winkel machen, nennt mann die Schenkel des Winkels, (crura anguli) wie AB, BC. Den Punkt aber, in welchem ſich die linien ſchneiden, die Spize des Winkels (vertex anguli), als B.

Anm. 1. Daß mann die linien, welche den Winkel machen, Schenkel nennt, iſt daher gekommen,

weil die Schenkel am menſchlichen Körper auch einen Winkel mit dem Leibe machen.

Anm. 2. Mann bezeichnet einen Winkel entweder mit einem Buchſtaben, der bisweilen an die Spize, wie B, bisweilen in die Oefnung geſezt wird, wie O; oder mit drei Buchſtaben wie ABC, ſo daß der mittelſte an die Spize, die andern beiden an die Schenkel geſezt werden.

159.

Ob ein Winkel gröſſer iſt als der andre, kann mann erfaren, wenn mann ſie auf einander paſſet, ſo daß die Spize und der eine Schenkel des erſten Winkels, die Spize und den einen Schenkel des andern deket.

Dieſes kann allemal geſchehen. Denn der Schenkel eines jeden Winkels iſt eine gerade Linie. §. 157. 158. Gerade Linien deken einander aber wechſelsweiſe, wenn ſie gleich ſind, und übereinander geleget werden. §. 123.

Nun kömmt hier auf die Länge der Schenkel nichts an; und wenn auch etwas darauf ankäme, ſo könnte ich allemal den einen Schenkel ſo lang machen, als den andern. Es iſt aber genug, daß hier die Spize des Winkels und der eine Schenkel mit der Spize und dem einen Schenkel des andern Winkels zuſammenfallen.

Wenn nun der andre Schenkel des einen Winkels ebenfalls auf den andern Schenkel des zweiten Winkels paßt, ſo daß ſie ſich deken; folglich in zwei Winkeln die beiden Spizen und beide par Schenkel einander deken, ſo ſind die Winkel ganz gleich, oder einer iſt ſo gros als der andre.

Fällt aber der andre Schenkel des zweiten Winkels, nachdem beide mit dem einen Schenkel zuſammenpaſſen,

nicht

nicht auch mit dem andern Schenkel des erſten Winkels zuſammen, ſondern auſer demſelben, ſo iſt der zweite Winkel gröſſer als der erſte.

Fällt endlich der andre Schenkel des zweiten Winkels, nachdem beide mit dem einen Schenkel auf einander gepaſſet worden, innerhalb des erſten Winkels, ſo iſt der zweite Winkel kleiner als der erſte.

Anm. Für die Augen läßt ſich dieſes beſſer durch zwei in Winkel gebogne Dräter, oder durch winkelichte Schnitte Papier, als durch Figuren zeigen.

160.

Winkel, die einander deken, ſind einander gleich.

161.

Winkel, die einander nicht deken können, ſind ungleich. Der gröſſere Winkel unter zweien iſt der, welcher den andern dekt, one hinwiederum von ihm gedekt zu werden. Der kleinere Winkel unter zweien iſt der, welcher von dem andern gedekt wird, one hinwiederum dieſen andern zu deken.

162.

Sollen zwei Winkel einander deken, ſo wird erfodert, daß die Spize des einen, mit der Spize des andern, und beide Schenkel des einen, mit beiden Schenkeln des andern zuſammenfallen.

163.

Gerade Linien, die einander ſchneiden, deken ſich nicht.

Denn wenn gerade Linien einander deken, ſo fallen ſie in allen Punkten zuſammen.

Wenn ſie aber einander ſchneiden, treffen ſie nur in einem Punkte zuſammen, §. 126.

164.

Wenn alſo die eine Seite AB eines Winkels A auf den einen Schenkel CD eines andern Winkels C geleget wird, one daß noch beide Spizen A und C, die jedoch beide nach einer Seite gekert ſein müſſen, zuſammenfallen, ſo kann mann ſchon daran ſehen, daß der eine Winkel A den andern C niemals deken wird, wenn die beiden andern Schenkel CE und AF beider Winkel, falls ſie gehörig verlängert werden, einander ſchneiden.

Denn iſt dieſes, ſo werden ſich beſagte Schenkel CE und AF immer ſchneiden, mann mag auch die andern Schenkel AB und CD auf einander hin und her ſchieben, wie mann will.

Schneiden ſich aber dieſe Schenkel CE und AF unter dieſen Umſtänden immer, ſo können ſie ſich auch unter dieſen Umſtänden niemals deken. §. 163.

165.

Winkel, die einander nicht deken können, ſind ungleich, §. 161. Nun können zwei mit ihren Spizen nach einer Seite zugekerte Winkel, die mit dem einen Schenkel einander ſchneiden, indem ſie mit dem andern auf einander fallen, einander niemals deken. §. 164. Alſo ſind zwei mit ihren Spizen nach einer Seite zugekerte Winkel, die mit dem einen Schenkel einander ſchneiden, indem ſie mit dem andern auf einander fallen, einander ungleich.

166.

Es ſind alſo nunmer zwei Wege bekannt, zu erforſchen ob zwei Winkel einander ungleich ſind;

1) wenn mann zwei Winkel mit der Spize und dem einen Schenkel auf einander legt, und alsdenn die andern Schenkel einander nicht deken. §. 159.

2) Wenn mann zwei Winkel, deren Spizen nach einer Seite zu liegen, nicht mit der Spize, ſondern nur mit einem Schenkel auf einander legt, und alsdenn die andern Schenkel gehörig verlängert einander ſchneiden. §. 165.

167.

Es iſt aber bei dem zweiten Wege, die Ungleichheit zweier Winkel zu erforſchen, nicht genug, zu wiſſen, daß die beiden andern Schenkel nach der einen Seite zu verlängert einander nicht ſchneiden, ſondern mann muß auch darauf ſehn, ob ſie nicht einander ſchneiden, fals ſie auf der andern Seite verlängert würden.

Denn es folgt nicht, daß zwei Winkel, z. E. CAB und DEB, die, mit dem einen Schenkel EB und AB auf einander gelegt, mit dem andern DE und AC, wenn er in beiden nach der einen Seite (hier nach D und C) zu verlängert würde, einander nicht ſchneiden, deswegen gleich ſein.

Denn mann verlängere nur dieſe andern Schenkel in beiden nach der andern Seite, ſo werden ſie ſich bei F ſchneiden, und folglich können die Winkel nicht gleich ſein.

Denn da zwei gerade linien, die ſich ſchneiden, einander nicht deken können, ſie mögen ſich ſchneiden, in welchem Punkte ſie wollen, ſo können ſich auch die Schenkel

DE und AC der beiden Winkel DEB und CAB nicht deken, indem die andern beiden Schenkel auf einander liegen; da jene Schenkel nach H und G verlängert einander ſchneiden.

168.

Winkel, die auf einer und eben derſelben Seite einer geraden Linie, aus dem nemlichen Punkte von einer oder mereren geraden Linien gemacht werden, heiſen **Nebenwinkel** (anguli contigui).

Die Winkel x und o ſind Nebenwinkel. Sie liegen auf der nemlichen Seite der Linie CD, und werden in dem nemlichen Punkte B von der Linie AB gemacht.

Die Winkel m n y z ſind auch Nebenwinkel. Sie liegen insgeſamt auf eben derſelben Seite der Linie EF, und werden aus dem nemlichen Punkte derſelben G von den Linien HG, IG, KG gemacht.

Tab. III. Fig. 23. Aber die Winkel ECD und FAB ſind keine Nebenwinkel. Sie liegen zwar auf einerlei Seite der nemlichen geraden Linie, ſind aber nicht aus einem und eben demſelben Punkte gezogen.

So ſind auch die Winkel s und t keine Nebenwinkel; ſie werden zwar beide in einem Punkte auf der Linie AB von der Linie CD gemacht; liegen aber nicht beide auf einer und eben derſelben Seite der Linie AB, ſondern t liegt diſſeits, s jenſeits derſelben.

169.

Eine gerade Linie, die auf eine andre ſo fällt, daß die beiden Nebenwinkel einander gleich werden, ſteht auf derſelben **ſenkrecht**, oder **perpendicular**.

Oder,

Oder, welches einerlei iſt, eine gerade linie ſteht auf der andern perpendicular, wenn ſie ſich nicht mer nach dem einen als nach dem andern Endpunkte dieſer linie zu neiget.

170.

Fällt aber eine gerade linie auf die andre ſo, daß die beiden Nebenwinkel einander ungleich werden, ſo ſteht ſie ſchief auf der andern.

171.

Mann kann eine Perpendicularlinie leicht haben, wenn mann ein Stük, wenigſtens auf einer Seite, nach gerader linie beſchnittnes Papier, wie ADCB ſo zuſammenleget, oder falzet, daß die linie AB die andre BC deke; denn in dieſem Falle muß die linie DB, nach welcher das Papier gefalzet worden, perpendicular auf AC ſtehn. Denn da AB und BC ſich deken, DB aber beiden gemeinſchaftlich iſt, oder wenn mann ſie für AB beſonders, und für BC beſonders nimmt, offenbar DB auch DB deken muß; ſo deken ſich folglich die Winkel ABD und DBC. Sie ſind demnach auch einander gleich. Nun ſind aber die Winkel ABD und DBC Nebenwinkel, die von der linie DB auf AC gemacht werden. Und folglich macht die linie DB auf AC zwei gleiche Nebenwinkel. Eine gerade linie, die auf einer andern zwei gleiche Nebenwinkel macht, ſteht auf dieſer perpendiculär, §. 169. Alſo ſteht DB auf AC perpendiculär.

Anm. Andre Arten perpendiculäre linien zu ziehen, können erſt weiter unten gezeiget werden.

172.

Ein Winkel, den eine Perpendicularlinie auf einer geraden Linie macht, heiſt ein rechter Winkel (angulus rectus).

Z. E. Fig. 29. wenn AB auf CD perpendicular, ſo ſind x und o rechte Winkel.

173.

Mann bekömmt alſo allemal einen rechten Winkel, wenn mann, wie §. 171. gezeigt worden, und auf andre Arten, die im folgenden gezeigt werden ſollen, eine Perpendicularlinie auf eine gerade Linie ſezt.

174.

Da die Perpendicularlinie, wenn ſie auf eine gerade Linie fällt, zwei gleiche Nebenwinkel macht, §. 171. ſo iſt der Nebenwinkel eines rechten Winkels allemal auch ein rechter; und wenn eine Perpendicularlinie am Ende einer geraden Linie ſteht, ſo entſteht gleich noch ein rechter Winkel, wenn dieſe gerade Linie jenſeit des Perpendikels verlängert wird, wie der Winkel n. Fig. 30. nachdem FG jenſeits des Perpendikels HF nach E verlängert worden.

175.

Es iſt folglich auch kein rechter Winkel gröſer, als ein andrer rechter, ſondern alle rechte Winkel ſind einander gleich.

176.

Ein Winkel, der kein rechter iſt, heiſt ein ſchiefer, (angulus obliquus).

Ein ſchiefer Winkel iſt entweder gröſſer oder kleiner als ein rechter.

Ein

Ein Winkel der gröſſer iſt als ein rechter, heiſt ein ſtumpfer (angulus obtuſus); ein Winkel der kleiner iſt als ein rechter, heiſt ein ſpizer (angulus acutus).

Anm. Wenn ein Menſch ganz gerade auf dem Stule ſizt, ſo machen ſeine Schenkel mit dem Leibe einen rechten; wenn er ſich hinten über lent, einen ſtumpfen; wenn er ſich vorwärts biegt, einen ſpizen Winkel.

An dem Giebel eines Hauſes machen beide Dächer zuſammen einen ſpizen Winkel; das Dach mit der ſenkrechten Linie der Mauer einen ſtumpfen; die Mauer mit der Grundfläche worauf ſie ſteht, wenn ſie ſich nicht geſenkt hat, einen rechten Winkel. Wenn die Mauer eines Hauſes aber ſich nach auſen zu ſenkt, ſo macht ſie mit dem Grunde des Hauſes einen ſtumpfen; wenn ſie ſich aber einwärts ſenkt, mit eben dieſem Grunde und Boden einen ſpizen Winkel.

177.

Mann kann einen jeden ſtumpfen und ſpizen Winkel mit einem rechten vergleichen.

Von einem ſtumpfen Winkel muß mann noch einen gewiſſen Winkel abziehn, um einen rechten Winkel zu bekommen, §. 176.

Zu einem ſpizen Winkel muß mann noch einen gewiſſen Winkel zuſezen oder addiren, wenn mann einen rechten Winkel haben will, §. 176.

Der Winkel nun, den mann von einem ſtumpfen abziehn, und zu einem ſpizen addiren muß, um einen rechten zu bekommen, heiſt die Ergänzung eines ſtumpfen

pfen oder ſpizen Winkels zum rechten Winkel, oder ſchlechtweg die Ergänzung eines ſtumpfen oder ſpizen Winkels.

Fig. 32. iſt ABC ein ſtumpfer Winkel. Will ich einen rechten daraus haben, ſo ziehe ich die Perpendicularlinie BD; folglich beſteht ABC aus den Winkeln ABD + DBC. Und weil DBC ein rechter Winkel, den mann R nennen kann; ſo iſt

ABC = ABD + R, folglich wenn mann
ABD = ABD gleiches von gleichem abzieht

iſt ABC — ABD = R.

Hier iſt alſo der Winkel ABD die Ergänzung des ſtumpfen Winkels zum rechten.

Fig. 31. iſt CDE ein ſpizer Winkel. Will ich einen rechten daraus machen, ſo ziehe ich die Perpendicularlinie FD. Alsdenn iſt der rechte Winkel FDE. Dieſer beſteht aber aus den beiden Winkeln CDE und FDC.

Alſo iſt der rechte Winkel FDE = CDE + FDC; und FDC iſt die Ergänzung des ſpizen Winkels CDE.

178.

Wenn zwei rechte Winkel mit ihren Spizen ſo an einander geſezt werden, daß ſie einen Schenkel gemeinſchaftlich haben, ſo machen ihre äuſerſten Schenkel eine gerade Linie aus.

Die beiden Winkel ACB und EDF Fig. 34. ſind rechte Winkel. Sie ſollten auf vorbeſchriebne Art zuſammengeſezt werden. Dieſes iſt Fig. 35. geſchehen. Daraus folgt aber, daß ihre äuſerſten Schenkel AD und DF eine gerade Linie ausmachen müſſen.

Denn

Denn wenn der Schenkel AD nicht mit dem DF eine gerade linie machen ſollte, ſo müßte er entweder ſich einwärts biegen, wie Da oder auswärts wie Db; dieſe Winkel BDa und BDb würden ſich aber, wenn ſie auf BDF gelegt werden ſollten, niemals mit dieſem BDF deken. Sie könnten alſo auch dieſem BDF nicht gleich ſein; folglich auch keine rechten Winkel ſein; da alle rechte Winkel einander gleich ſind.

Zuſaz. Wenn alſo auf eine gerade linie neben einem rechten Winkel merere ſpize Nebenwinkel gezogen werden, ſo müſſen dieſe ſpizen Nebenwinkel eines rechten Winkels zuſammen einem rechten, und folglich ein rechter Winkel mit ſeinen ſpizen Nebenwinkeln zuſammen zweien rechten gleich ſein. Denn Fig. 32. ſind DBC + DBE = 2 R, die ſpizen Winkel aber ABE + ABD = DBC, folglich ſind die ſpizen Winkel ABE + ABD + dem rechten DBE = 2 R.

179.

Jede Gröſe iſt ſich ſelber gleich.

180.

Gleiche Gröſen kann mann für einander ſezen, oder mit einander verwechſeln, einander ſubſtituiren.

181.

Ein ſtumpfer Winkel mit ſeinem Nebenwinkel zuſammen iſt = 2 R, d. i. zweien rechten Winkeln gleich. Es ſei Fig. 32. ABC der ſtumpfe Winkel, ſo iſt ABE deſſen Nebenwinkel. Mann ziehe aus B eine Perpendicularlinie BD, ſo ſind DBE und DBC rechte Winkel;

alſo

alſo DBE + DBC = 2 R
nun iſt DBE = ABE + ADB nach der Figur
und DBC = ABC — ADB nach der Figur
――――――――――――――――― addirt nach §. 104.
DBE + DBC = ABE + ABC, oder welches einerlei iſt
ABE + ABC = DBE + DBC
Nun iſt DBE + DBC = 2 R wie vorher;
――――――――――――――――― eins läßt ſich alſo für das andre ſubſtituiren,
alſo: ABE + ABC = 2 R oder welches einerlei iſt
ABC + ABE = 2 R.

Das iſt: der ſtumpfe Winkel mit ſeinem Nebenwinkel zuſammen iſt gleich zweien rechten.

182.

Das Zeichen > iſt das Zeichen des Gröſſern; z. E. 5 > 3 heiſt: fünf iſt gröſſer als drei. Hingegen < iſt das Zeichen des Kleinern; und 3 < 5 heiſt: drei iſt kleiner als fünf.

183.

Der Nebenwinkel eines ſtumpfen Winkels iſt allzeit kleiner als ein rechter, d. i. ein ſpizer Winkel.

Denn

Denn es iſt Fig. 33.

der ſtumpfe Winkel $ABC = R + ADB$

$$
\begin{array}{rl}
ABC + ABE & = 2R \\
\text{folglich } R + ADB + ABE & = 2R \\
R & = R \quad \text{abgezogen} \\
\hline
ADB + ABE & = R \\
ADB & = ADB \quad \text{ſubtr.} \\
\hline
ABE & = R - ADB
\end{array}
$$

Nun iſt $(R - ADB) < R$

folglich auch $ABE < R$.

Das iſt: der Nebenwinkel des ſtumpfen Winkels iſt kleiner als ein rechter.

184.

Alſo können niemals zwei ſtumpfe Winkel auf einer geraden Linie als Nebenwinkel bei einander ſtehn; und folglich wenn der eine ſtumpfe Winkel merere Nebenwinkel hat, ſo können dieſe alle zuſammen noch keinen rechten Winkel betragen, ſondern ihre Summe muß einen gewiſſen ſpizen Winkel ausmachen.

185.

Wenn zwei Nebenwinkel auf einer Linie ſtehn, und der eine davon iſt ſpiz, ſo iſt der andre ſtumpf.

Denn es iſt Fig. 33.

der ſpize Winkel $ABE = R - ADB$

Nun iſt $ABE + ABC = 2R$

folglich $R - ADB + ABC = 2R$

$$
\begin{array}{r}
ADB = ADB \text{ addirt} \\
\hline
R + ABC = 2\,R + ADB. \\
R = R \text{ ſubtr.} \\
\hline
ABC = R + ADB \\
(R + ADB) > R
\end{array}
$$

folglich $ABC > R$.

D. i. in der Figur, der Nebenwinkel ABC des ſpizen ABE iſt gröſſer als ein rechter; d. i. er iſt ein ſtumpfer Winkel.

186.

Alle ſpize Winkel, die aus einem und eben demſelben Punkte auf der nemlichen Seite einer geraden Linie gezogen werden, ſo viel ihrer auch ſein mögen, ſind zweien rechten gleich.

Oder alle ſpize Nebenwinkel zuſammen ſind zweenen rechten Winkeln gleich.

Vorausſezung. Fig. 33. ſind AFE, EFD, DFC, CFB ſpize Nebenwinkel.

Saz. $AFE + EFD + DFC + CFB = 2\,R.$

Beweis. Mann ziehe die Perpendicularlinie FG, ſo ſind GFB und GFA rechte Winkel

und alſo $GFB + GFA = 2\,R.$

Nun iſt $AFE + EFG = R$ nach dem Augenſchein in der Figur

und eben ſo $GFD + DFC + CFB = R.$

addirt

$AFE + EFG + GFD + DFC + CFB = 2\,R.$

Nun iſt nach der Figur $EFG + GFD = EFD$

folglich ſubſtituirt

$AFE + EFD + DFC + CFB = R$

welches zu erweiſen war.

187.

187.

Die verſchiedenen Fälle der Nebenwinkel ſind alſo folgende.

Es ſtehn auf einer Linie als Nebenwinkel

1) entweder zween rechte,

2) oder ein rechter mit merern ſpizen Winkeln, welche ſtatt des andern rechten geſezet worden,

3) oder ein ſtumpfer mit einem oder merern ſpizen,

4) oder merere ſpize Winkel.

Von allen dieſen Fällen iſt erwieſen §. 178 - 186. daß die Summe ſo viel als zwei rechte Winkel betrage.

Alſo iſt es auch allgemein war, daß die Summe aller Nebenwinkel, die auf einer geraden Linie ſtehn, der Summe zweener rechten Winkel gleich ſei.

188.

Mann kann ſich jederzeit die Spize eines Winkels als den Mittelpunkt eines Cirkels, und den einen Schenkel deſſelben als den Radius, mit welchem ein Cirkel beſchrieben werde, vorſtellen.

Tab. IV. Fig. 40.

So iſt Fig. 40. aus der Spize C des Winkels ACB, als aus dem Mittelpunkte, mit dem Schenkel AC als einem Radius ein Cirkel beſchrieben worden.

189.

Wenn dieſes nun geſchehn iſt, ſo ſieht mann leicht, daß ein gewiſſer Bogen des Cirkels, der aus der Spize des Winkels beſchrieben worden, z. E. Fig. 40. der Bogen AB, zwiſchen die Schenkel des Winkels falle.

190.

Dieſer Bogen, der zwiſchen die Schenkel eines Winkels fällt, muß notwendig grösſer werden, ſo wie der Winkel grösſer wird, und kleiner, ſo wie der Winkel kleiner wird.

Denn wenn CA bis in Ca fortrükt, ſo iſt der Winkel aCB offenbar grösſer als ACB; es iſt aber auch der Bogen aB grösſer, als der Bogen AB.

Wenn aber der Schenkel des Winkels AC dem andern Schenkel CB ſich näherte, und z. E. in Cb zu liegen käme; ſo iſt der Winkel bCB offenbar kleiner als ACB; es iſt aber auch der Bogen bB kleiner als AB.

191.

Tab. IV. Fig. 41.

Sind nun aber zwei Winkel einander gleich, ſo ſind auch die ihnen zukommende Bogen des Cirkels gleich, der aus ihrer Spize beſchrieben worden.

Es ſollen z. B. Fig. 41. die Winkel DCE und ECF einander gleich ſein. Wenn dieſes iſt, ſo müſſen ſie einander deken. Es wird alſo der Punkt E in ECF auf den Punkt E in DCE; und eben ſo der Punkt F auf D fallen. Es müſſen alſo notwendig auch die Bogen DE und EF einander deken, folglich auch einander gleich ſein.

Anm. Auch dieſe Säze müſſen durch Scheiben von Papier, auf welchen die gehörigen Linien gezogen ſind, anſchaulich gemacht werden.

192.

Tab. IV. Fig. 36. 37.

Ein jeder Cirkel läßt ſich durch den Mittelpunkt in vier gleiche Theile theilen.

Mann beſchreibe aus dem Mittelpunkte C, Fig. 36. einen Cirkel ABED; auf einem Blatte Papier. Mann ſchneide hierauf die Cirkelſcheibe aus, und lege ſie, indem mann ſie nach einer geraden linie, die durch C geht, falzet, einmal zuſammen, ſo wird der Theil der Peripherie ABD, ſich mit BED deken, wie Fig. 37. ausweiſet; indem der Punkt A mit dem Punkt E, und ſo überall ABD mit BED genau zuſammenfallen wird. Da nun auch die gerade linie BD, welche beiden gemeinſchaftlich iſt, in keinem von beiden Theilen eine andere Richtung haben kann, als in dem andern, ſo deken ſich alſo die beiden Stüke ABD und BED, ſowol in Abſicht der Peripherie, als in Abſicht der linie BD; ſie deken alſo einander ganz und gar, oder um und um. Es iſt alſo ABD = BED; oder der Cirkel iſt nunmer in zwei gleiche Theile oder Hälften getheilet.

Mann lege nun dieſe beiden Hälften nochmals in dem Punkte C ſo zuſammen, daß CD auf BC falle, wie Fig. 38; ſo werden vier Cirkelſtüke entſtehn, die alleſamt gleich ſind, weil ſie einander deken. Daß ſie ſich aber deken müſſen, erhellet daraus, weil CD, BC, CE Radii des nemlichen Cirkels ſind, die nach §. 150. einander gleich ſind; folglich auch einander deken. Da nun auch ſich die zwiſchen den Radiis CE und CB enthaltnen Cirkelbogen deken müſſen; ſo deken einander dieſe ganzen Cirkelſtüke.

Und wenn folglich das Papier wieder auseinandergeſchlagen wird, erſcheinet der Cirkel wie Fig. 39. in 4 gleiche Stüke getheilet.

193.

Indem mann die Hälfte des Cirkels Fig. 37. nochmals zuſammenlegte, kam die Linie CD gerade auf BC zu liegen, und es mußte folglich nach §. 171. 173. ein rechter Winkel entſtehn; und da die 4 durch die beſchriebne Falzung des Papiers entſtandenen Cirkelſtüken einander deken §. 192. ſo müſſen auch in allen die Winkel gleich ſein, d. h. es müſſen vier rechte Winkel um den Mittelpunkt des Cirkels herum entſtehn.

Mann kann dis noch auf eine andre Art zeigen.

Bei der Zuſammenlegung der Cirkelſcheibe, wie bei Fig. 38, muſte wenigſtens ein rechter Winkel entſtehn, weil BD ſo gefalzet wurde, daß die beiden Hälften BC und CD übereinander fielen. §. 171. 173.

Nachdem nun die Cirkelſcheibe wieder auseinander gelegt worden, wie bei Fig. 39. ſo ſieht mann offenbar, daß hier vier Winkel entſtanden ſind, nemlich

ACB; ACD; DCE; und ECB.

Da nun nach dem was oben geſagt worden, ein rechter Winkel wenigſtens darunter ſein muß, ſo neme mann an, es ſei dieſer rechte Winkel ACB.

Sobald dieſes feſtgeſezt iſt, ſo folgt, daß auch die übrigen lauter rechte Winkel ſein müſſen.

Denn 1) ACD iſt der Nebenwinkel von ACB.
Nun iſt ACB ein rechter

---

alſo auch ACD ein rechter. §. 178.

2) DCE iſt der Nebenwinkel von ACD.
Nun iſt ACD ein rechter nach num. 1.

Alſo auch DCE ein rechter.

3) BCE

3) BCE iſt der Nebenwinkel von ECD
Da nun BCE ein rechter nach num. 2.

So iſt ECD auch ein rechter Winkel.

194.

Es leidet alſo keinen Zweifel, daß ein ganzer Cirkel vier rechte Winkel enthalte. Der halbe Cirkel enthält folglich zwei rechte Winkel; und der vierte Theil eines Cirkels einen rechten Winkel.

Und da mann die Peripherie eines jeden Cirkels in 360 Grad eintheilet, §. 156. ſo kann mann auch ſagen, daß zwei rechte Winkel einen Bogen von 180 Grad, und ein rechter Winkel einen Bogen von 90 Grad enthalte.

195.

Es iſt bereits §. 190. 191. geſagt worden, daß, je gröſſer die Winkel werden, deſto gröſſer auch die Cirkelbogen werden, die aus ihrer Spize innerhalb ihrer Schenkel beſchrieben werden.

Mann ſieht alſo ſchon hieraus, daß mann die Winkel durch Cirkelbogen meſſen könne, die aus ihrer Spize innerhalb ihrer Cirkelbogen beſchrieben werden.

Denn wenn mann frägt: wie gros iſt ein Winkel, ſo will mann nicht etwa wiſſen, wie lang ſeine Schenkel ſind, weil daran bei dem Winkel nichts liegt, ſondern wie gros ſeine Eröfnung iſt, und dieſes weis mann, ſobald als mann weiß, wie viel von einem Cirkel innerhalb ſeiner Schenkel liegt, der aus ſeiner Spize beſchrieben worden; d. h. wie gros der Bogen ſei, den mann aus ſeiner Spize innerhalb der Schenkel beſchrieben hat.

Es läßt ſich aber dieſe Warheit, daß ein jeder Winkel durch den Bogen gemeſſen werden könne, der aus ſeiner Spize

innerhalb ſeiner Seiten beſchrieben worden, auf folgende Weiſe noch deutlicher machen.

Die Spize eines jeden Winkels läßt ſich als ein Mittelpunkt betrachten, um welchen ein Cirkel, mit welchem Radius mann will, beſchrieben werden kann. Alſo iſt Fig. 40. mit der Spize des Winkels ACB ein Cirkel beſchrieben worden.

Nun muß alſo notwendig ein Stük des Cirkels oder ein gewiſſer Bogen zwiſchen die Schenkel des Winkels fallen, wie hier AB. Dieſer Bogen nun kömmt ſchlechterdings nur der Gröſe dieſes Winkels, und ſonſt keinem gröſſern, oder kleinern zu. Denn öfnet mann den Winkel ACB mer, indem die Seite CA bis nach Ca fortgefüret wird, ſo iſt nicht mer der Bogen AB, ſondern aB zwiſchen den Seiten des Winkels enthalten. Macht mann aber den Winkel ACB kleiner, indem mann die Seite CA bis nach Cb fortfüret, ſo iſt auch nicht mer der Bogen AB, ſondern bB zwiſchen den Schenkeln des Winkels enthalten. Es hat alſo jeder durch ſeine Gröſe von andern unterſchiedne Winkel, auch ſeinen eignen Bogen, der keinem andern zukommt, der gröſſer oder kleiner wäre.

Folglich muß mann die Gröſe eines Winkels durch den Bogen beſtimmen können, der aus ſeiner Spize innerhalb ſeiner Seiten beſchrieben wird.

196.

Es kömmt aber hiebei nichts darauf an, wie gros der Cirkel ſei, der aus der Spize eines Winkels beſchrieben worden.

Denn Tab. IV. Fig. 42. iſt aus dem nemlichen Mittelpunkte ein gröſſerer und kleinerer Cirkel beſchrieben worden. Der gröſſere iſt durch Linien, die aus dem Mittelpunkte nach dem Umkreiſe gezogen worden, in Bogen abgetheilet worden, deren jeder 15 Grad enthält; in eben ſo viele gleiche Bogen iſt aber dadurch auch der kleinere Cirkel, der mit dem gröſſern den nemlichen Mittelpunkt hat, abgetheilet worden; und da nun jeder Cirkel 360 Grad hat, ſo iſt es einerlei, ob ich die Win-

Winkel durch einen Bogen eines gröſſern Cirkels, oder eines kleinern meſſe, wenn nur beide aus der Spize des Winkels, als aus ihrem gemeinſchaftlichen Mittelpunkte beſchrieben werden.

197.

Ein jeder Cirkelbogen hat eine gewiſſe Anzal Grade, weil der ganze Cirkel in 360 Grade eingetheilt wird.

Folglich muß auch jeder Winkel durch einen Bogen gemeſſen werden, der eine gewiſſe Anzal Grade hat.

Es iſt daher ein Winkel von 45 Grad, deſſen Mas ein Bogen iſt von 45 Grad. Ein Winkel von 90 Grad iſt ein Winkel, deſſen Mas ein Bogen iſt, welcher 90 Grad enthält.

Da nun der vierte Theil eines Cirkels 90 Grad enthält, ſo iſt ein rechter Winkel, oder ein Winkel von 90 Grad einerlei.

Und ein ſtumpfer Winkel iſt gröſſer als 90 Grad; ein ſpizer Winkel iſt kleiner als 90 Grad.

198.

Wenn mann einen halben Cirkelbogen hätte, der in ſeine 180 Grad abgetheilt wäre, ſo müßte mann alſo damit (vorerſt wenigſtens auf dem Papiere) jeden Winkel meſſen können, fals mann die Spize des Winkels auf ſeinen Mittelpunkt, und den einen Schenkel des Winkels auf den Durchmeſſer des halben Cirkelbogens legte, und ſodann an der Peripherie des halben Cirkels nachzälte, wie viel Grade davon zwiſchen die beiden Seiten des Winkels fielen.

Anm. 1. Ein Inſtrument zu dieſer Verrichtung auf dem Papiere heiſt ein Transporteur, deſſen Geſtalt und Gebrauch hier mündlich gezeigt wird.

2. Wie gröſſere Winkel z. E. auf dem Felde gemeſſen werden, davon künftig.

199.

Mann kann nunmer von neuem beweiſen, daß alle Nebenwinkel zuſammen zweenen rechten Winkeln gleich ſind.

Denn es iſt einerlei, ob mann ſagt, alle Nebenwinkel ſind zween rechten Winkeln gleich, oder ob mann ſagt, ſie ſind einem halben Cirkel, oder 180 Grad gleich.

Wenn mann alſo beweiſen kann, daß alle Nebenwinkel zuſammen einem halben Cirkel oder 180 Grad gleich ſind, ſo iſt auch von neuem bewieſen, daß ſie zweenen rechten gleich ſind.

Tab. IV. Fig. 43.

Vorausſezung. x, y, o, n, ſind Nebenwinkel.

Saz. $x + y + o + n = \frac{1}{2}$ Circ.

Beweis.

Nr. I. Alle Nebenwinkel werden aus Einem gemeinſchaftlichen Punkte oder Spize auf der nemlichen Seite einer geraden Linie gezogen. §. 168.

Nun läßt ſich aus jedem Punkte auf einer geraden Linie, nach welcher Seite mann will, ein halber Cirkel beſchreiben.

Alſo läßt ſich aus der gemeinſchaftlichen Spize C der Nebenwinkel x, y, o, n, ein halber Cirkel beſchreiben.

Nr. II. Der Bogen des aus der Spize eines Winkels beſchriebnen Cirkels, welcher zwiſchen ſeine Schenkel fällt, iſt das Mas eines Winkels.

Nun läßt ſich aus C um die Nebenwinkel x, y, o, n, ein halber Cirkel AB beſchreiben, nach nr. I.

Alſo iſt der halbe Cirkel AB das Mas dieſer Nebenwinkel.

Das heiſt, die Nebenwinkel ſind einem halben Cirkel gleich,

oder $x + y + o + n = \frac{1}{2}$ Circ.

200.

Alle Winkel, die aus einem einzigen Punkte rings um ihn herum gezogen werden können, ſind einem ganzen Cirkel oder 360 Grad, oder vier rechten Winkeln gleich.

Tab. V. Fig. 44.

Vorausſezungen.

1. Der Punkt, aus welchem die Winkel rings herum gezogen worden, ſei C.
2. Mann beſchreibe aus dieſem Punkte C einen Cirkel ADBE.
3. Mann verlängre eine von den Seiten des Winkels, welche mann will, nach der andern Seite der Peripherie, z. E. mann verlängre DC bis in F, ſo iſt DF der Durchmeſſer des Cirkels, und folglich
4. iſt FAD und FEBD jeder ein halber Cirkel.

Saz. Die Winkel ACE + ACD + DCB + ECB = Circ. oder 360 Grad, oder vier rechten Winkeln.

Der Winkel ACF = dem Bogen AF
der Winkel ACD = dem Bogen AD
——————————————— addirt
ACF + ACD = AF + AD
AF + AD = FAD nach der Figur
———————————————
Alſo ACF + ACD = FAD
Nun iſt FAD = $\frac{1}{2}$ Circ. (nach der 4ten Vorausſezung)
———————————————
nr. I. Alſo ACF + ACD = $\frac{1}{2}$ Circ.

Ferner
der Winkel FCE = dem Bogen FE
der Winkel ECB = dem Bogen EB
der Winkel DCB = dem Bogen DB
——————————————— add.
FCE + ECB + DCB = FE + EB + DB

Nun

Nun iſt FE + EB + DB = FEBD nach der Figur

Alſo FCE + ECB + DCB = FEBD.

Nun iſt FEBD = $\frac{1}{2}$ Circ. (Vorausſ. 4.)

nr. II. Folglich FCE + ECB + DCB = $\frac{1}{2}$ Circ.

Da nun

nach nr. I. ACF + ACD = $\frac{1}{2}$ Circ.

nach nr. II. FCE + ECB + DCB = $\frac{1}{2}$ Circ.

so iſt addirt

ACF + FCE + ACD + ECB + DCB = Circ.

Nun iſt ACE = ACF + FCE nach der Figur

Alſo ACE + ACD + ECB + DCB = Circ.

Das heiſt: alle Winkel um den Punkt C herum ſind einem ganzen Cirkel gleich, d. i. 360 Grad, oder vier rechten Winkeln gleich, weil jeder Cirkel vier rechte Winkel enthält.

201.

Winkel, die mit ihren Spizen dergeſtalt in einem Punkte zuſammenſtoſen, daß die Schenkel des einen verlängert die Schenkel des andern ausmachen, heiſen Verticalwinkel oder Scheitelwinkel. Z. E. Tab. III. Fig. 27. ſind s und t Verticalwinkel.

Sie füren dieſen Namen, weil ſie ihre Spizen gegen einander keren, und mann die Spize eines Winkels auch manchmal den Scheitel des Winkels (vertex anguli) nennt.

202.

Alle Verticalwinkel ſind einander gleich.

Vorausſezung.

Tab. V. Fig. 45. ſind o und x Verticalwinkel.

Saz.

Saz. $o = x$.

Beweis. $o + c = 2\,R$

$c + x = 2\,R$

folglich

$$o + c = c + x$$

$c = c$ ſubtr.

folglich $o = x$.

Eben dis hätte mann auf folgende Art zeigen können.

Mann beſchreibe aus C auf DB und AE einen halben Cirkelbogen;

ſo iſt $o + c = \frac{1}{2}$ Circ.

$c + x = \frac{1}{2}$ Circ.

$$o + c = c + x$$

$c = c$ ſubtr.

$$o = x.$$

203.

Folglich wenn mann weis, wie gros einer von zweenen Verticalwinkeln iſt, ſo weiß mann auch, wie gros der andre iſt, und braucht dieſen nicht erſt zu meſſen.

204.

Auch wenn mann von zwei Nebenwinkeln den einen weis, ſo kann mann auch finden, wie gros der andre iſt. Denn weil beide zuſammen 180 Grad betragen, ſo darf mann nur den einen, deſſen Gröſe mann ſchon weis, von 180 Grad abziehn, und was übrig bleibt muß die Gröſe des andern Nebenwinkels ſein.

Es ſei z. E. der eine Nebenwinkel 46 Grad.

Mann ziehe von 180

46 ab,

bleibt 134;

alſo iſt der andre Winkel 134 Grad.

205.

Mann erſieht alſo aus den beiden Fällen §. 203. 204. ſchon, daß mann die Gröſe eines Dinges finden kann, wenn mann es gleich auch ſelbſt nicht ausmeſſen kann.

Es ſagte einmal ein verſtändiger Mann zu einem einfälti-gen Bauer, wie gros der Mond ſei. Hm! ſagte der Bauer; wer iſt denn oben geweſen, und hat ihn ausgemeſſen? Ein achtjäriger Schüler der Geometrie kann nun ſchon einſehn, daß das eine einfältige Rede war. Er wird denken, kann ich wiſſen, wie gros ein Nebenwinkel iſt, wenn ich ihn gleich nicht ſelbſt ausgemeſſen habe, ſo kann es ja auch wol ſein, daß mann wiſſe, wie gros der Mond iſt, wenn mann gleich nicht hinaufſteigen und ihn ausmeſſen, oder ihn herunterholen und abwägen kann. Mann muß alſo nicht von dem urteilen, was mann nicht verſteht; und eben ſo wenig ſich auf das wenige etwas einbilden, was mann verſteht.

IX.

Gründe der Multiplication.

206.

Wenn mann eine gewiſſe Zal ſo oftmal nemen ſoll, als die Einheit in einer andern enthalten iſt, ſo heiſt das jene Zal mit dieſer multipliciren.

Z. E. ich ſoll 4 ſo oftmal nemen, als die Einheit in 3 enthalten iſt. Nun iſt die Einheit in 3 natürlich dreimal enthalten, weil 3 = 1 + 1 + 1. Alſo ſoll ich 4 dreimal nemen, oder 4 + 4 + 4 machen, das heiſt 12. Anſtatt nun zu ſagen, ich habe 4 ſo oftmal genommen als die Einheit in 3 ſtekt; ſagt mann kürzer: ich habe 4 mit 3 multiplicirt.

Oder ich ſoll 8 ſo oftmal nemen, als die Einheit in 2 enthalten iſt. Nun iſt 2 = 1 + 1. Alſo iſt die Einheit in 2 zweimal enthalten. Ich ſoll alſo 8 zweimal nemen; oder 8 + 8 machen, das heiſt ich ſoll 8 mit 2 multipliciren.

Oder ich ſoll 25 ſo oftmal nemen als die Einheit in 4 enthalten iſt, das iſt viermal. Folglich ſoll ich 25 + 25 + 25 + 25 zuſammenſezen. Alſo

25
25
25
25

100.

Wenn ich alſo 25 mit 4 multiplicire, ſo bekomme ich hundert heraus.

207.

Wenn mann alſo multipliciret, ſo ſoll mann aus zwei gegebnen Zalen, eine neue Zal finden, in welcher die eine von den gegebnen Zalen ſo oft enthalten iſt, als die Einheit in der andern.

Es war 4 mit 3 zu multipliciren. Hier waren alſo zwei gegebene Zalen. Ich ſollte alſo 4 ſo oft zuſammenſezen, als 1 in 3 enthalten war. Oder wie

$$3 = 1 + 1 + 1$$

ſo mußte die neue gefundne Zal

$$12 = 4 + 4 + 4$$

ſein. Indem ich alſo die Zal 12 gefunden habe, habe ich eine Zal gefunden, in der die eine gegebne Zal 4 ſo oft enthalten iſt, als die Einheit in der andern gegebnen Zal 3.

Es war ferner 8 mit 2 zu multipliciren. Hier waren alſo wieder zwei gegebne Zalen. Ich ſollte alſo eine Zal finden, in der die eine gegebne Zal 8 ſo oft enthalten wäre, als die Einheit in der andern gegebnen 2: das heiſt, ich ſollte die Zal 8 einmal und noch einmal d. i. 2 mal nemen; wodurch denn die Zal 16 gefunden wurde.

Eben ſo mit dem dritten Beiſpiele. 25 mit 4 zu multipliciren heiſt eine Zal finden, in der die eine gegebne Zal 25 ſo oft enthalten iſt, als 1 in der andern gegebnen, nemlich 4; ſo daß wie

aus	1		25
	1	ſo aus	25
	1		25
	1		25
entſteht	4	entſtehe	100.

208.

Die Zal, welche beim Multipliciren gefunden wird, heiſt das Product; und die gegebnen beiden Zalen, aus denen das Product entſteht, heiſen die Factoren.

Wenn 3 mit 4 multiplicirt wird; kömmt 12 heraus. Hier iſt die Zal 12 das Product, und 3 und 4 ſind die Factoren.

Die gegebnen Zalen 2 und 8, aus denen ich durch die Multiplication 16 finde, heiſen die Factoren, und die gefundene Zal 16, die aus den beiden Factoren entſtanden iſt, heiſt das Product.

Wenn ich 25 mit 4 multipliciren ſoll, ſo ſind 25 und 4 zwei Factoren; aus dieſen entſteht 100, indem ich 25 4mal neme; es heiſt alſo 100 das Product von 25 und 4.

209.

Es iſt aber einerlei, ob mann eine ganze Summe auf einmal mit einer Zal multipliciret, oder ob mann die einzelnen Theile der Summe mit eben dieſer Zal nach und nach multipliciret, und die einzelnen Producte der Theile nachher zuſammen addiret.

Z. E. Die Zal 25 kann mann in die zwei Theile 20 und 5 theilen; und wenn nun beide Theile mit 4 multiplicirt werden

ſo kömmt aus	20	und aus	5
	20		5
	20		5
	20		5
heraus	80	kömmt	20.

Wenn

Wenn nun 80 und 20 addiret wird

80
20
———
ſo kömmt 100 heraus.

Aber eben dis kömmt auch heraus, wenn 25 ſogleich mit 4 multipliciret wird, wie §. 208.

210.

Mann kann ſich dieſes alles noch deutlicher machen, wenn mann folgendes überlegen will.

Es ſoll 4 mit 3 multipliciret werden:

```
    A * * * * B
C * o o o o G
  * o o o o
D * o o o o
    E     F
```

Die Sternchen bei AB und CD ſtellen die Factoren vor Die Nullen können Thaler, Groſchen, oder andre Dinge, die mann zälen kann, bedeuten. Nun iſt der eine Factor AB ſo oft zuſammengeſezt worden, als der andre CD Einheiten hat. Und wie dieſer Factor CD aus drei Einheiten beſteht, ſo beſteht das Product EFG aus drei ſolchen Zalen, als der Factor AB iſt.

Nun ſeze mann, daß 12 mit 4 multiplicirt werden ſoll, ſo kann mann 12 in die drei Theile auflöſen, 3, 4, 5; und jeden beſonders multipliciren.

```
      A     |    B     |     C
    * * *   | * * * *  | * * * * *
D * o o o   | o o o o  | o o o o o
  * o o o   | o o o o  | o o o o o
  * o o o   | o o o o  | o o o o o
E * o o o   | o o o o  | o o o o o
```

Bei A iſt 3 mit 4; bei B 4 mit 4; bei C 5 mit 4 multiplicirt worden. Oder jede dieſer Zalen iſt ſo oft zuſam-

mengeſezt worden, als der andre Factor DE Einheiten hat. Dieſes giebt der Augenſchein. Auf ſolche Weiſe kamen die Producte 12, 16, 20. Und zält mann alle dieſe Einheiten zuſammen, ſo daß mann in eins fortzält, ſo findet mann, daß ſie zuſammen 48 betragen. Aber eben dieſe 48 muſten herauskommen, wenn ich den Factor 12 ganz nam, und ihn gleich auf einmal mit 4 multiplicirte. Alsdenn ſah das Exempel ſo aus.

```
  * * * * * * * * * * * *
* o o o o o o o o o o o o
* o o o o o o o o o o o o
* o o o o o o o o o o o o
* o o o o o o o o o o o o
```

Hier iſt nun kein Unterſchied, als daß die Reihen der Einheiten an einander gerükt ſind, die vorher getrennt waren, übrigens ſind es wie vorher 48.

211.

Es iſt auch leicht einzuſehn, daß es einerlei iſt, wenn mann zwei Factoren hat, aus denen mann ein Product machen ſoll, ob mann den erſten Factor ſo oftmal nimmt, als der zweite Einheiten hat, oder den andern ſo oftmal als der erſte Einheiten hat.

So iſt es z. E. einerlei, ob ich, wenn 3 mit 4 multiplicirt werden ſoll, die 3 viermal, oder die 4 dreimal neme.

```
 3        4
 3        4
 3        4
 3      ----
----     12
 12
```

Und ſo in allen übrigen Fällen; wie mann auch an dieſer Figur ſieht:

A

A		B
a * * * * b		c * * * d
c * o o o o		a * o o o
* o o o o		* o o o
d * o o o o		* o o o
		b * o o o

In beiden Fällen A und B ſind die Factoren einerlei, nemlich 3 und 4. Nur iſt bei A der Factor 4 dreimal zuſammengeſezt; und bei B iſt der Factor 3 viermal zuſammengeſezt. Aber in beiden Fällen iſt das Product gleich, wie der Augenſchein zeigt; und der ganze Unterſchied beſteht blos darinn, daß das Exempel bei B anders geſtellt iſt, als bei A.

212.

Ob es nun aber gleich in Abſicht des Products einerlei iſt, mit welchem Factor mann multiplicire, ſo pflegt mann doch, weil es meiſtens bequemer iſt, dafern die beiden Factoren ungleich ſind, lieber den gröſſern mit dem kleinern zu multipliciren; das heiſt, den gröſſern ſo oft zuſammenzuſezen, als die Einheit in dem kleinern enthalten iſt.

Als wenn 15 mit 6 zu multipliciren wäre, würde ich lieber 15, 6mal zuſammenſezen, als 6 funfzehnmal; obgleich in beiden Fällen das Product 90 herauskömmt.

213.

Es iſt leicht zu begreifen, daß wenn der eine Factor 1 iſt, das Product dem andern Factor gleich ſein muß; als 1mal 2 iſt 2; 1mal 10 iſt 10; 1mal 100 iſt 100. Das heiſt mit andern Worten: Was mit der Zal 1 multiplicirt wird, wird nicht vermert, ſondern die Zal, welche damit multiplicirt werden ſollte, bleibt ungeändert.

214.

Anders verhält ſichs mit allen Zalen, die über Eins hinausgehn.

Wir wollen vorerſt, um die Sache möglichſt zu erleichtern, nur die Fälle vornemen, wo der Factor, mit welchem multiplicirt werden ſoll,

2, oder 3, oder 4 iſt.

Mann nennt aber den Factor, mit welchem multiplicirt wird, den **Multiplicator**; und den, welcher multiplicirt werden ſoll, den **Multiplicandus**.

Geſezt nun, es ſei
der Multiplicandus 5432
der Multiplicator 2

ſo ſoll ich alſo 5 Tauſender, 4 Hunderter, 3 Zehner und zwei Einer, jeden zweimal nemen.

5000	400	30	2
5000	400	30	2
10000	800	60	4

Dis wäre alſo Zehntauſend acht hundert ſechzig und vier.

Aber dis brauchte ich nicht mit ſo vielen Nullen zu ſchreiben, ſondern kürzer nach §. 78-83.

10864

Dis wäre alſo das Product aus 5432 durch zwei.

Aber ich hätte auſerdem noch kürzer verfaren können; denn da es einerlei iſt, ob ich die einzelnen Theile eines Factors, oder den ganzen Factor auf einmal mit dem andern Factor multiplicire, ſo würde das nemliche Product, aber geſchwinder, gefunden worden ſein, wenn mann gleich die ganze Zal 5432 zweimal zuſammengeſezt hätte:

Multiplicandus	5432	5432
Multiplicator	2	5432
	Product	10864.

215.

Eben ſo 5432 mit 3 multiplicirt, wäre

5000	400	30	2	das iſt	15000	addirt
5000	400	30	2		1200	
5000	400	30	2		90	
					6	
15000	1200	90	6		16296	

Das nemliche Product wird kürzer ſo gefunden:

```
 5432
 5432
 5432
------
16296.
```

216.

Aber auch dieſe Rechnung kann mann ſer abkürzen, wenn mann folgendes Täfelchen auswendig lernen will.

2 mal 2 iſt 4	3 mal 6 iſt 18
2 mal 3 iſt 6	3 mal 7 iſt 21
2 mal 4 iſt 8	3 mal 8 iſt 24
2 mal 5 iſt 10	3 mal 9 iſt 27
2 mal 6 iſt 12	3 mal 10 iſt 30
2 mal 7 iſt 14	4 mal 4 iſt 16
2 mal 8 iſt 16	4 mal 5 iſt 20
2 mal 9 iſt 18	4 mal 6 iſt 24
2 mal 10 iſt 20	4 mal 7 iſt 28
3 mal 3 iſt 9	4 mal 8 iſt 32
3 mal 4 iſt 12	4 mal 9 iſt 36
3 mal 5 iſt 15	4 mal 10 iſt 40

Anm. Ob alles in dieſem Täfelchen richtig iſt, muß ein jeder ſelbſt nachrechnen.

217.

Nun wird das vorige Exempel geſchwinder ſo gerechnet: 1) Mit dem Multiplicator 2.

5432
2
10864

2) Mit dem Multiplicator 3.

5432
3
16296

3) Mit dem Multiplicator 4.

5432
4
21728

Im letzten Falle heiſt es: 2 mal 4 iſt 8; die 8 wird untergeſchrieben; 3 mal 4 iſt 12; die 2 wird untergeſchrieben und Eins im Sinn behalten; 4 mal 4 iſt 16; und Eins (ſo im Sinn behalten war) dazu iſt 17; die 7 wird untergeſezt, und 1 im Sinn behalten; 4 mal 5 iſt 20 und 1 im Sinn dazu iſt 21.

Wenn mann hier alle Zalen hätte nach ihrem eigentlichen Werthe ſchreiben und ausſprechen wollen, ſo würde es mit dieſem Exempel ſo gegangen ſein:

5432
4
8
120
1600
20000
21728

Nem-

Nemlich 4 mal 2 (Einer) ſind 8 (Einer), 4 mal 3 (Zehner, oder 4 mal 30) ſind 12 (Zehner, oder 120), 4 mal 4 (Hunderter) ſind 16 (Hunderter, oder 1600), 4 mal 5 (Tauſender) ſind 20 (Tauſender, oder 2 Zehntauſender). Dis nun zuſammenaddirt, gibt wie vorher 21728. Mann ſieht aber, daß mann, one zu irren, auf jene Art weit geſchwinder davon kömmt.

218.

Beiſpiele zur Uebung in der Multiplication mit den Factoren 2, 3, oder 4.

1) 579 Mann ſollen jeder 2 Rthl. bekommen. Wie viel beträgt das? Und wie viel beträgt es, wenn jeder 3; und wie viel, wenn jeder 4 Rthl. bekommt?

2) 457 mit 2, 574 mit 3, 754 mit 4 multiplicirt; was iſt von jedem das Product?

3) 754 mit 2, 457 mit 3, 574 mit 4 multiplicirt; was iſt von jedem das Product?

4) Ein Alphabet in einem gedrukten Buche hat 23 Bogen; wie viel Bogen enthalten 4 Alphabet?

5) 4 Alphabet zu druken koſtet, wie viel? wenn ein Bogen 3 Rthl. Drukerlon koſtet?

6) 123456789 multipl. mit 4, Product?

7) Ebendieſelbe Zal multipl. mit 3, Product?

8) 10203040 mit 4 multipl., Product?

219.

Da aber eben ſo oft die Fälle vorkommen, wo mann mit 5, 6, 7, 8, 9 multipliciren muß, als mit 2, 3, 4, ſo muß mann auch dem Gedächtniſſe noch folgende Säze einprägen.

5 mal 5 iſt 25	7 mal 7 iſt 49
5 mal 6 iſt 30	7 mal 8 iſt 56
5 mal 7 iſt 35	7 mal 9 iſt 63
5 mal 8 iſt 40	7 mal 10 iſt 70
5 mal 9 iſt 45	8 mal 8 iſt 64
5 mal 10 iſt 50	8 mal 9 iſt 72
6 mal 6 iſt 36	8 mal 10 iſt 80
6 mal 7 iſt 42	9 mal 9 iſt 81
6 mal 8 iſt 48	9 mal 10 iſt 90
6 mal 9 iſt 54	
6 mal 10 iſt 60	

220.

Hat mann dieſe Säze auswendig gelernt, ſo kann mann nun auch folgende und alle änliche Exempel der Multiplication rechnen.

56789	56789	56789
5	6	7
Product?		
56789	56789	54321
8	9	9
Product?		
54321	54321	54321
8	7	6
Product?		
54321	9182736	9182736
5	5	6
Product?		

9182736	9182736	9182736
7	8	9

Product?

504060	603070	108090
9	8	9

Product?

221.

Die beiden Täfelchen §. 216. 219. zuſammengenommen heiſen das Einmal Eins, welches mann kürzer ſo ſchreiben kann.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Wenn mann in dieſer Tafel ſuchen will, wie viel 4 mal 6 macht, ſo ſucht mann in der erſten Columne, die perpendiculär ſteht, 4 auf, und in der oberſten Querzeile 6, und in dem Fache, wo ſich die von jener 4 in die Quer und die von dieſer 6 herabgezogene Linien durchſchneiden, ſteht das Product 24.

222.

Bisher ſind nur Fälle der Multiplication vorgekommen, bei welchen der eine Factor eine einfache Ziffer war. Wie aber, wenn der Multiplicator aus 2, 3, 4 und merern Ziffern beſteht? d. i. wenn nicht blos Einer, ſondern auch Zehner, Hunderter, Tauſender ꝛc. in demſelben vorkommen?

223.

Vorerſt betrachten wir den Fall, wenn der Multiplicator 10 iſt.

Es ſoll z. E. 2543 mit 10 multiplicirt oder 10 mal genommen werden.

Es iſt klar, 1) wenn ich die 3 Einer 10 mal nemen ſoll, daß 30 Einer, oder welches einerlei iſt, 3 Zehner daraus werden.

2) Daß, wenn 4 Zehner 10 mal genommen werden, 4 Hunderter herauskommen müſſen; denn 10 mal 10 iſt 100; oder ein Hunderter iſt zehnmal ſo viel, als ein Zehner; folglich ſind 4 Hunderter ſo viel als 10 mal 4 Zehner.

3) Wenn 5 Hunderter 10 mal genommen werden, ſo muß aus eben dieſem Grunde das Product 5 Tauſender ſein. Denn Ein Hunderter 10 mal genommen iſt Ein Tauſender; alſo müſſen 5 Hunderter 10 mal genommen 5 Tauſender ſein.

4) Endlich wenn 2 Tauſender mit 10 multiplicirt werden ſollen, ſo müſſen 20 Tauſender herauskommen.

Alſo wenn 2543 mit 10 multiplicirt wird,	
ſo kommen nach Nr. 1) drei Zehner, d. i.	30
nach Nr. 2) 4 Hunderter, d. i.	400
nach Nr. 3) 5 Tauſender, d. i.	5000
nach Nr. 4) 2 Zehntauſender, d. i.	20000
zuſammen	25430

Dieſes hätte mann nun aber offenbar viel kürzer haben können, wenn mann die Null von dem Multiplicator 10 gleich an den

Factor

Factor 2543 one weitere Umſtände angehängt hätte, da mann denn ſogleich 25430 zum Product würde bekommen haben.

Daß dis in allen änlichen Fällen ſich eben ſo verhalten müſſe, erſiehet mann aus folgenden Gründen.

Wenn eine Zal mit 10 multiplicirt werden ſoll, ſo müſſen alle ihre Ziffern zehnmal mer werden.

Und eben ſo umgekert: wenn alle Ziffern, aus welchen eine Zal beſteht, 10 mal gröſſer geworden ſind, ſo iſt die Zal richtig mit 10 multiplicirt worden.

So bald aber an eine Zal hinten eine Null angehängt wird, ſo werden alle ihre Ziffern 10 mal mer als ſie vorher waren.

Z. E.

T.	H.	Z.	E.
2	5	4	3

ſind 2 Tauſender, 5 Hunderter, 4 Zehner, 3 Einer; ſo bald ich aber eine Null anhänge, ſo kommen alle dieſe Ziffern um eine Stelle weiter nach der linken Hand zu, und werden alſo alle zehnmal gröſſer:

ZT.	T.	H.	Z.	E.
2	5	4	3	0

Nun ſind es 2 Zehntauſender, 5 Tauſender, 4 Hunderter, 3 Zehner; jede Ziffer iſt alſo zehnmal gröſſer geworden; und daher wird eine jede Zal, die mit 10 multiplicirt werden ſoll, richtig multiplicirt, wenn mann ihr eine Null anhängt.

224.

Auf eben die Art wird begreiflich, daß wenn eine Zal mit 100, 1000, 10000 ꝛc. multiplicirt werden ſoll, mann ihr blos ſo viel Nullen anhängen darf, als der Multiplicator hat.

Z. E.

2543	2543	2543
100	1000	10000
254300	2543000	25430000

225.

225.

Es iſt auch ganz leicht einzuſehn, daß eben dieſer Fall ſtattfinden müſſe, wenn an dem Multiplicandus ſo gut Nullen hingen als an dem Multiplicator, der aus 1 mit einer oder merern Nullen beſteht.

Z. E.

100	100	1000	2540
10	100	100	100
1000	10000	100000	254000

25400	254000	2540
100	10	10
2540000	2540000	25400

226.

Beſteht aber der Multiplicator aus einer Ziffer über Eins, als 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und einer oder merern angehängten Nullen, ſo muß mann entweder, ehe mann mit der Ziffer multiplicirt, ſo viel Nullen rechter Hand zum Product ſchreiben, als hinter der Ziffer des Multiplicators ſtehn; wie bei A; oder mann muß erſt mit der bloſen Ziffer multipliciren, und ſo viele Nullen als an dem Multiplicator hängen, dem Producte zuſezen; wie bei B.

A.

```
3574
 200
------
714800.
```

Nachdem die beiden Nullen unter die Linie geſchrieben worden, multiplicirt mann mit 2 in 4 u. ſ. f.

B.

```
3574
 200
------
```

Mann

Mann ſagt, 2 mal 4 iſt 8; 2 mal 7 iſt 14; ſchreibt die 4 unter, und behält 1 im Sinn; 2 mal 5 iſt 10 und 1 im Sinn dazu iſt 11; mann ſchreibt die 1 unter und behält 1 im Sinn; 2 mal 3 iſt 6, und 1 iſt 7; So bekömmt mann zum Product 7148, und hängt nun die beiden Nullen des Multiplicator 200 an; ſo iſt das ganze Product wie vorher 714800.

227.

Wenn mann aber mit einem Multiplicator, der aus zwei, drei, oder merern Ziffern beſteht, multipliciren ſoll, ſo iſt zu erwägen, daß wenn eine Zal mit 752 multipliciret werden ſoll, ſie nicht etwa ſiebenmal und fünfmal und zweimal genommen werden müſſe; ſondern ſiebenhundertmal, funfzigmal, und zweimal.

Es ſei alſo

5432

mit 752 zu multipliciren:

So muß ich alſo 5432 erſt 700 mal, denn 50 mal, endlich 2 mal zuſammenſezen, und alles was herauskömmt addiren.

Nun würde es über die Maſe weitläufig werden, wenn ich 5432 wirklich erſt 700 mal aufſchreiben und addiren, denn das nemliche noch 50 mal und noch 2 mal aufſchreiben und addiren, endlich die Summen wieder addiren ſollte.

Nun iſt es aber einerlei, ob ich 3 mit 700, oder ob ich 300 mit 7 multiplicire.

Es muß alſo auch einerlei ſein, ob ich die Zal 5432, 700 mal, oder ob ich das Hundertfache jener Zal, nemlich 543200 ſiebenmal neme.

Und eben ſo iſt es auch einerlei, ob ich die Zal 5432 mit 50, oder das Zehnfache derſelben mit 5 multiplicire.

Folglich, wenn 5432 mit 752 multipliciret werden ſoll, ſo muß ich nemen

C.	B.	A.
das Hundertfache ſiebenmal	das Zehnfache fünfmal	das Einfache von 5432 zweimal:
543200	54320	5432
543200	54320	5432
543200	54320	10864 Summe.
543200	54320	
543200	54320	
543200	271600 Summe.	
543200		
3802400 Summe.		

Zuſammen alſo: Summe von A: 10864
Summe von B: 271600
Summe von C: 3802400

Ganze Summe 4084864

So wäre alſo 4084864 das ganze Product, aus 5432 multiplicirt mit 752.

228.

Wer nun aber das EinmalEins wol inne hat, der erſpart ſich hier viel unnötige Mühe. Denn er kann das vorhergehende Exempel ſo rechnen:

```
   5432
    752
-------
  10864
 271600
3802400
-------
4084864
```

Er fängt mit 2 an, und ſagt 2 mal 2 iſt 4; 2 mal 3 iſt 6; zweimal 4 iſt 8; 2 mal 5 iſt 10; alſo zuſammen 10864.

Nun geht er zur 5; weil dis aber keine eigentliche 5 iſt, ſondern 50, ſo ſezt er erſtlich die an dem Multiplicator hängende

gende Null unter die 4 der erſten Reihe; und fårt nun fort mit 5 zu multipliciren; 5 mal 2 iſt 10; 5 mal 3 iſt 15 und 1 im Sinn iſt 16 u. ſ. w. bis das Product 271600 völlig daſteht. Endlich geht er zur 7 fort. Dieſe 7 aber bedeutet 700, weil ſie auf der dritten Stelle ſteht. Alſo muß mit 700 multipliciret werden; es werden alſo erſtlich die beiden Nullen von 700 untergeſezt, und denn mit 7 multiplicirt; 7 mal 2 iſt 14; (die 4 untergeſezt und 1 im Sinn) 7 mal 3 iſt 21 und 1 im Sinn 22; (die 2 untergeſezt, und 2 im Sinn behalten) u. ſ. f. bis das Product 3802400 völlig daſteht.

Nachdem dieſe drei einzelnen Producte gefunden worden, werden ſie addiret; und ſo kömmt das ganze Product 4084864 heraus.

229.

Auf eben dieſe Art werden folgende Exempel gerechnet:

1234	5432	384	56789
678	1245	932	234
9872	27160	768	227156
86380	217280	11520	1703670
740400	1086400	345600	11357800
836652	5432000	357888	13288626
	6762840		

230.

Nunmer läßt ſich weiter nichts mer abkürzen, als daß mann, wenn mann im Multipliciren, an den Zehner, Hunderter, Tauſender ꝛc. kömmt, die daran hängenden Nullen nicht wirklich an das Product zu ſchreiben braucht, wofern mann nur nicht vergißt, das nächſt folgende Product immer um eine Stelle weiter nach der linken Hand zu einzurüken.

Alsdenn ſehn die im vorigen §. angefürten Exempel ſo aus:

1234

1234	5432	384	56789
678	1245	932	234
9872	27160	768	227156
8638	21728	1152	170367
7404	10864	3456	113578
836652	5432	357888	13288626
	6762840		

Die angehängten Nullen dienen nemlich blos dazu, anzuzeigen, daß die ganze Zal um ſo viel Stellen weiter gerükt ſei, als Nullen am Ende beigefügt werden.. Rükt mann nun nur die Zalen gehörig fort, ſo braucht mann auch die Nullen nicht zu ſchreiben. Wir wollen zum Ueberfluß noch ein Exempel geben.

B	A
52	52
2345	2345
260	260
208	2080
156	15600
104	104000
121940	121940

Wenn hier 52 mit 4 multiplicirt wird, ſo iſt das eigentlich 52 mit 40; ich müßte alſo eigentlich

$$\begin{array}{r} 52 \\ 40 \\ \hline 2080 \end{array}$$

2080 herausbringen und unterſchreiben; wie bei A; auf ſolche Art kömmt 8 in die Stelle der Zehner unter 6; und ſo muß es auch ſein. Aber eben dis geſchieht auch bei B, wenn ich die Null weglaſſe, und nur nicht vergeſſe, die 8 um eine Stelle weiter nach der Linken zu rüken, u. ſ. w.

231.

Kommen in der Mitte des Multiplicators Nullen vor, ſo werden ſie entweder an das Product der nächſten Ziffer angehängt, oder dis Product wird noch um ſo viel Stellen, als Nullen im Multiplicator ſind, weiter eingerükt, als es onedem ſchon eingerükt werden müßte. Beides iſt im Grunde einerlei; das erſte iſt aber, um Verwirrung zu verhüten, bequemer.

Zum Beiſpiel:

```
   154321          154321
    20004           20004
 ---------       ---------
   617284          617284
308642000       308642
----------      ----------
3087037284      3087037284
```

232.

So oft eine Ziffer im Multiplicator merere mal vorkömmt, iſt das Product in Anſehung der Ziffern das nemliche, nur daß es auf einer höhern Stelle ſteht. Mann braucht alſo dieſes Product nicht noch einmal von neuem zu machen, ſondern darf es nur abſchreiben, und gehörig ſtellen.

Z. E.

```
      35457
       6626
   ---------
     212742   A
     70914
   212742     B
  212742      C
  -----------
  234938082
```

Hier iſt das bei A gefundne Product bei B und C blos wieder abgeſchrieben; da jedoch das bei B das Sechshundertfache und das bei C das Sechstauſendfache iſt, ſo ſteht die unterſte Ziffer zur rechten Hand bei B auf der 3ten, und bei C auf der 4ten Stelle.

Dis dienet in manchen Fällen zu deſto gröſſerer Geſchwindigkeit der Rechnung.

Z. E. es iſt zwar einerlei, ob ich 6666 mit 3754, oder 3754 mit 6666 multiplicire; aber auf dieſe Art werde ich geſchwinder fertig; wie die Vergleichung von beiden ausweiſet.

```
     6666              3754
     3754              6666
   ------            ------
    26664             22524
   33330             22524
  46662             22524
 19998             22524
 --------          --------
 25024164          25024164
```

233.

Es ſind nunmer alle Fälle abgehandelt, die bei der Multiplication ſolcher Zalen, mit denen wir uns izt beſchäftigen, vorkommen können.

1) Wenn der Multiplicator nur eine einfache Ziffer iſt, §. 214 ff.

2) Wenn er aus merern Ziffern beſteht:

a) aus 1 mit einer oder merern Nullen, §. 223.

b) aus andern Ziffern mit angehängten Nullen, §. 226.

c) aus Ziffern one Nullen am Ende, §. 227.

d) aus Ziffern in deren Mitte Nullen vorkommen, §. 231.

e) wenn eine Ziffer mereremal vorkömmt, §. 232.

234.

Zu mererer Uebung im Multipliciren, welche ſer fleiſig wiederholet werden muß, dienet das Multipliciren ſolcher Zalen, die in Thalern, Groſchen, Pfennigen, Centnern, Pfunden, Loten, Ruten, Schuhen, Zollen u. ſ. w. ausgedrükt ſind.

235.

Mann will wiſſen, wie viel 378 Rthl. 20 Gr. 8 Pf. 35 mal genommen betragen.

378 Rthl.	20 Gr.	8 Pf.
35	35	35
1890	100	40
1134	60	24
13230 Rthl.	700 Gr.	280 Pf.

d. i. weil 700 Gr. machen 28 Rthl. 28 Gr. oder 29 Rthl. 4 Gr. und 280 Pfennige machen 23 Gr. 4 Pf.

13230	4	—
29 Rthl.	23 Gr.	4 Pf.
13260 Rthl.	3 Gr.	4 Pf.

2) Mann will wiſſen, wie viel 4 Centner 68 Pf. 3 Lot 12 mal genommen betrage.

4 Cent.	68 Pf.	3 Lot
12	12	12
48	136	36
	68	
	816	

d. i. 48 Cent. und 7 Cent. 46 Pf. und 1 Pf. 4 Lot, d. i. 55 Cent. 47 Pf. 4 Lot.

3) Mann verlangt zu wiſſen, wie viel 8 Wiſpel 10 Scheffel 13 Mezen 24 mal genommen betragen.

8 W.	10 S.	13 M.
24	24	24
192	240	52
		26
		312

4) Mann verlangt zu wiſſen, wie viel 20 Ruten 4 Schuh 3 Zoll 8 mal genommen betragen.

20 R.	4 Sch.	3 Zoll
8	8	8
160	32	24

 d. i.

d. i. wenn die Rute 16 Schuh und der Schuh 12 Zoll hat:
162 R. 2 Schuh — Zoll.

236.

Bisweilen ſoll mann alles auf die kleinſte Benennung bringen.

Z. B.

1) wie viel machen 270 Rthl. 8 Gr. 4 Pf. in Pfennigen?

270 Rthl.
24 multipl.
―――――
1080
540
―――――
6480 Wert der Thaler in Groſchen
8 Groſchen addirt
―――――
6488
12
―――――
12976
6488
―――――
77856 Wert der Thaler und Groſchen in Pfennigen
4 Pfennige add.
―――――
77860 Wert des Ganzen in Pfennigen.

2) wie viel machen
20 Cent. 55 Pfd. 8 Lot an Loten?

20 Cent.
110 multipl.

200
20

2200 Wert der Centner in Pfunden
55 Pfd. add.

2255 Wert der Centner und Pfunde in Pfunden
32 multipl.

4510
6765

72160 Wert der geſamten Pfunde in Loten.
8 Lot add.

72168 Ganzer Betrag in Loten.

3) wie viel betragen 25 Wiſpel 16 Scheffel 8 Mezen in Mezen?

25 Wiſpel
24 multipl.

100
50

600 Scheffel
16 Scheffel add.

616 Scheffel
16 multipl.

3696
616

9856 Mezen
8 Mezen add.

9864 Ganzer Betrag in Mezen.

4) wie viel betragen 24 Ruten 10 Schuh 8 Zoll in Zollen.

```
  24 Ruten
  16 multipl.
 ----
 144
 24
 ----
 384 Schuh
  10 Schuh addirt
 ----
 394
  12 multipl.
 ----
 788
394
 ----
4728 Zoll
   8 Zoll add.
 ----
4736 ganzer Betrag in Zollen.
```

237.

Aufgabe zur Beluſtigung.

Wenn drei Würfel auf einen Tiſch geworfen, und ſodann in Ordnung neben einander geſezt worden, die Augen jedes Würfels zu erraten.

Auflöſung.

Geſezt, es habe jemand die Würfel ſo geworfen, daß 4, 6, 2 Augen, in dieſer Ordnung neben einander ſtehn,

ſo laſſe mann ihn für ſich		4
den erſten Würfel zur Linken dupliren		2
		8
dazu 5 addiren		5
	Summe	13
dieſe Summe mit 5 multipliciren		5
	Product	65

die

die Augen des mittelſten Würfels addiren 6

Summe 71
dieſe Summe mit 10 multipliciren 10

710
die Augen des dritten Würfels addiren 2

Summe 712
Dieſe Summe laſſe mann ſich ſagen, und ziehe für ſich
von dieſer Summe 712
die Zal 250 ab 250

462
ſo drüken die Ziffern in dieſer Zal die Augen der Würfel und die Ordnung, wie ſie geſtellt werden, aus.

Ein andres Beiſpiel. Geſezt, der andre habe die Augen 5, 4, 3 geworfen, und die Würfel in dieſer Ordnung geſtellt.
Mann laſſe alſo wieder den andern 5
den erſten Würfel dupliren 2

10
dazu 5 addiren 5

Summe 15
dieſe Summe mit 5 multipl. 5

Product 75
dazu die Augen des mittelſten Würfels addiren 4

Summe 79
dieſe Summe mit 10 multipl. 10

Product 790
dazu den leztern Würfel addirt 3

Summe 793
Läßt mann ſich nun dieſe Zal 793 ſagen,
und zieht von derſelben ab 250

ſo bleibt 543
und dieſe Zal zeigt wiederum die Augen der Würfel, und die Ordnung an, in welcher ſie geſtellt worden.

238.

Eine andere Aufgabe.

Einer Perſon die Zal zu nennen, welche ſie in Gedanken hat.

Auflöſung.

Mann laſſe die Zal, welche der andre in Gedanken hat, verdoppeln; noch 4 dazu addiren; die Summe mit 5 multipliciren; zu dieſem Product 12 addiren, und alles mit 10 multipliciren. Was nun hier herausgekommen, läßt mann ſich ſagen, und zieht für ſich 320 davon ab. Von dem übriggebliebenen Reſte ſchneidet mann die beiden äuſerſten Ziffern zur rechten Hand ab; und die vorhergehende Zal iſt die, welche die Perſon gedacht hat.

Mann ſeze, der andre habe ſich die Zal 6 in Sinn genommen.

So iſt die gedachte Zal	6
verdoppelt	12
dazu 4 addirt gibt	16
multiplicirt mit 5	5
gibt	80
dazu addirt	12
gibt	92
dis mit 10 multipl. gibt	920
von dieſer Summe abgezogen	320
läßt	600

Die beiden lezten Nullen abgeſchnitten, bleibt die Zal 6, welche der andre in Gedanken hatte.

Ein andres Beiſpiel. Die gedachte Zal ſei 11.

So iſt 11 verdoppelt	22
4 dazu addirt gibt	26
multipl. mit 5 gibt	130
12 dazu addirt gibt	142
mit 10 multipl.	1420
abgezogen	320
bleibt	1100

Schneidet mann nun die beiden Nullen ab, ſo bleibt die von dem andern in Sinn genommne Zal übrig.

239.

Noch eine Aufgabe zur Beluſtigung.

Wenn unter merern in einer Reihe ſizenden Perſonen eine einen Ring genommen; die Perſon, die Hand, den Finger und das Gelenke zu erraten, woran ſie ſolchen geſtekt hat.

Mann laſſe durch eine andre Perſon, die das Geſuchte weiß, die Zal des Plazes, welchen die Perſon, die den Ring genommen, in der Reihe einnimmt, verdoppeln, und zu dieſer Zal 5 addiren.

Die Summe laſſe mann mit 5 multipliciren und 10 addiren.

Zu der lezten Summe laſſe mann 1 ſezen, wenn der Ring an der rechten, und 2 wenn er an der linken Hand ſtekt; und das Ganze wieder mit 10 multipliciren.

Zu dieſem Product laſſe mann die Zal des Fingers ſezen, vom Daumen an gerechnet, und alles mit 10 multipliciren.

Endlich laſſe mann die Zal des Gelenkes und auſerdem noch 35 addiren.

Die lezte Summe laſſe mann ſich geben, und ziehe davon 3535 ab; ſo wird der Reſt aus vier Ziffern beſtehn, deren erſte Ziffer linker Hand den Plaz der Perſon, die zweite die rechte oder linke Hand, die dritte den Finger, und die vierte das Gelenke anzeigt.

Es habe z. E. die dritte Perſon den Ring an die linke Hand, und zwar an das zweite Gelenke des Daumen geſtekt.

So iſt die Zal der Perſon	3
multipl. mit 2 gibt	6
5 addirt gibt	11
dis mit 5 multipl.	55
10 addirt	10
und die Zal der linken Hand	2
	67
mit 10 multipl. gibt	670
dazu die Zal des Daumens	1
	671
dis wieder mit 10 multipl.	6710
dazu add. die Zal des Gelenkes	2
	6712
noch 35 addirt	35
Summe	6747

Von dieſer Summe nun, die mann ſich ſagen läßt 6747
ziehe mann ab 3535

ſo bleibt 3212

und alſo zeigt die erſte Ziffer an, daß die dritte Perſon; die 2 zeigt, daß ſie den Ring an der linken Hand; die 1, daß ſie an den Daumen, und die lezte 2, daß ſie an das 2te Gelenke des Daumens den Ring geſtekt habe.

Geſezt aber, daß die 6te Perſon in der Reihe an das dritte Gelenke des 5ten Fingers rechter Hand den Ring geſtekt hätte, ſo würde dis ſo gefunden.

Mann läßt einen andern die Zal der Perſon	6
multipliciren mit	2
	12
dazu addiren	5
	17
dieſes noch multipliciren mit	5
ſo iſt das Product	85
zu dieſem 10 add.	10
und die Zal der rechten Hand	1
Summe	96
dis multipl. mit 10	960
zu dieſem die Zal des Fingers add.	5
Summe	965
dieſe multipl. mit 10 iſt	9650
dazu addirt die Zal des Gelenkes	3
Summe	9653
hiezu noch 35 addirt	35
Summe	9688
Wenn nun, nachdem mann ſich dieſe Summe 9688 hat ſagen laſſen, davon abzieht	3535
ſo bleibt	6153

deren Ziffern wieder nach der Ordnung die Anzal der Perſon, die rechte Hand, die Zal des Fingers und des Gelenkes verraten.

240.

240.

Das Zeichen der Multiplication bei Zalen iſt $\times$ z. E. $3 \times 4 = 12$ heiſt: dreimal vier iſt gleich oder äqual 12.

241.

Wenn mann aber mit allgemeinen Zeichen multiplicirt, ſo ſezt mann die Buchſtaben blos neben einander, one weiteres Zeichen.

So heiſt $a\,b\,c$ ſo viel als $a \times b \times c$; oder a mit b, und dann mit c multiplicirt.

$a + b$ heiſt a zu b addirt; $a - b$ heiſt b von a ſubtrahirt; ab heiſt a mit b multiplicirt.

242.

Es frägt ſich aber nun, wie mann mit Gröſen multipliciren ſolle, die das Zeichen + oder — haben.

243.

Erſter Fall. Wenn beide Factoren das Zeichen + haben.

Es ſollen + 3 mit + 4 multipliciret werden. Das heiſt, es ſoll + 4 ſo oft zuſammengeſezt werden, als die Einheit in + 3 enthalten war.

Nun iſt + 3 ſo entſtanden aus 1, indem

$$\begin{array}{r} +1 \\ +1 \\ +1 \\ \hline +3 \end{array}$$

+ 1 dreimal zuſammengeſezt wurde. Alſo muß nun auch + 4 dreimal zuſammengeſezt oder addiret werden, woraus nichts anders als + 12 entſtehn kann.

$$\begin{array}{r} +4 \\ +4 \\ +4 \\ \hline +12 \end{array}$$

Hätte mann nun ſtatt + 3 geſezt + a, und ſtatt + 4 geſezt + b, ſo würde + a mit + b multiplicirt eben ſo zum Product gegeben haben + ab, wie + 3 mit + 4 gab + 3 × 4 = 12.

244.

Mann kann ſich dieſes auch noch auf folgende Art erläutern.

Es iſt bereits geſagt worden, daß + 3 Rthl. ſo viel heiſen können, als 3 bare Thaler, die einer wirklich beſizt, und — 3 Rthl. ſo viel heiſen können als 3 Rthl., die einer ſchuldig iſt. Ferner daß, wenn + das Bejahen andeutet, hingegen das Zeichen — das Verneinen andeuten müſſe.

Geſezt nun, es ſollen + 4 Rthl. mit + 3 multiplicirt werden; ſo heiſt dis ſo viel als
vier wirkliche Thaler dreimal bejahen, oder
dreimal bejahend zuſammenſezen.

Wie nun hieraus nichts anders entſtehn kann als zwölf wirkliche bare Thaler, ſo kann auch aus
+ 4 Rthl. multiplicirt mit + 3 nichts anders entſtehn, als + 12 Rthl.

Und folglich eben ſo, wenn + a mit + b multiplicirt wird, nichts anders als + ab.

Geſezt, mann verſtehe unter + geben, und unter — nemen; ſo wird
+ 4 Rthl. mit + 3 multipliciren ſo viel heiſen, als 4 wirkliche Thaler dreimal geben, woraus notwendig 12 wirkliche Thaler erwachſen müſſen.

245.

Es iſt alſo klar, wenn beide Factoren + haben, ſo hat das Product auch +; oder + mit + multiplicirt gibt +; d. h. plus mit plus multiplicirt gibt plus.

246.

Zweiter Fall. Wenn beide Factoren das Zeichen — haben.

Es ſollen — 4 mit — 3 multiplicirt werden. Es ſoll alſo aus — 4 eine Zal gefunden werden, in welcher — 4 ſo oft enthalten iſt, als die Einheit in — 3. Nun iſt aber in — 3 nicht + 1 dreimal enthalten, denn das gäbe + 3; ſondern in — 3 iſt das Gegentheil von + 1, nemlich — 1, dreimal enthalten. Alſo muß auch aus — 4 eine Zal gefunden werden, in der das Gegentheil von — 4, das iſt + 4 dreimal enthalten ſei.

Alſo wenn — 4 mit — 3 multiplicirt wird, muß notwendig + 12 herauskommen.

Alſo auch wenn — a mit — b multiplicirt wird, ſo iſt das Product + a b.

247.

Wenn mann alſo

— 4 Rthl. mit — 3 multiplicirt, ſo müſſen + 12 Rthl. herauskommen.

Denn wenn — 4 Rthl. vier Thaler Schulden anzeigt, und mit — 3 multipliciren ſo viel iſt, als dreimal nemen; ſo iſt nichts gewiſſers, als daß vier Thaler Schulden dreimal nemen oder abnemen, ſo viel iſt als 12 wirkliche Thaler geben. Denn wie kann mann anders einem Schulden abnemen, als wenn mann ſie bezalt? Und wie kann mann ſie anders bezalen, als mit wirklichem Gelde?

Alſo wer — 4 Rthl. mit — 1 multiplicirt, das heiſt, wer 4 Rthl. Schulden einmal jemanden abnimmt, der bezahlt 4 wirkliche Thaler, oder + 4 Rthl. Wer — 4 Rthl. mit — 2 multiplicirt, oder: wer 4 Rthl. Schulden einem zweimal hintereinander abnimmt, der bezalt für ihn 8 wirkliche Thaler, oder + 8 Rthl.

Und folglich wer — 4 Rthl. mit — 3 multiplicirt, bezalt dreimal 4 wirkliche Thaler, oder das Product iſt + 12.

Wollte einer ſich einfallen laſſen,

— 4 mit — 3 multiplicirt

müſſe doch zum Product — 12 geben; ſo würde er eben ſo viel ſagen, als: wenn jemand 4 Rthl. Schulden dreimal aufheben, oder abnemen wollte, ſo müßte er 12 Rthl. Schulden machen. Wäre das nun nicht lächerlich?

Geſezt, Ferdinand wäre einem Beker 4 Rthl. ſchuldig geweſen; die hätte Adolph bezalet; darauf wär er wieder einem Schneider 4 Rthl. ſchuldig geworden; dieſe Schuld hätte Adolph auch getilget; endlich wär er auch einem Schuſter 4 Rthlr. ſchuldig geworden; auch dieſe 4 Rthlr. Schulden hätte ihm Adolph abgenommen. Mußte nun nicht Adolph wirkliche 12 Rthl. oder + 12 Rthl. hergeben, wenn er ſeinem Freunde dreimal 4 Rthl. Schulden, d. h. 3 mal — 4 Rthl. abnemen, d. h. mit — multipliciren ſollte? Hätte er aber — 12 Rthl. gemacht, d. h. hätte er ſelbſt 12. Rthl. Schulden gemacht, wie hätten denn des Ferdinand ſeine 12 Rthl. Schulden bezalt werden können?

248.

Es iſt alſo klar, wenn beide Factoren — haben, ſo iſt das Product +; oder — mit — *multiplicirt gibt* +; d. h. minus mit minus *multiplicirt gibt plus*.

249.

Zu deſto beſſerer Einſicht beider Regeln §. 246. 248. dienen noch folgende Betrachtungen.

Wenn etwas mit + multiplicirt wird, ſo ſoll es ſo oftmal als die dabeiſtehende Zal anzeigt geſezt, oder addiret werden.

Alſo wenn + 4 mit + 3 multiplicirt wird, ſo muß + 4 + 4 + 4 zuſammengeſezt oder addirt werden, das iſt alſo + 12.

Eben ſo wenn + a mit + 3 multiplicirt wird, ſo iſt das $+a+a+a=+3a$.

Und

Und eben ſo wenn $+$ a mit $+$ b multiplicirt wird, ſo iſt das Product $+$ ba, oder $+$ ab.

Wenn hingegen etwas mit — multiplicirt wird, ſo ſoll es ſo oftmal als die dabeiſtehende Zal anzeigt weggenommen, oder ſubtrahirt werden.

Z. E. — 4 Rthl. mit — 3 multipliciren heiſt, — 4 Rthl. dreimal wegnemen, oder ſubtrahiren.

Alſo heiſt es ſo viel als

— 4 Rthl. — 4 Rthl. — 4 Rthl. ſubtrahiren.

Dis geſchieht aber nicht anders, als indem mann die Zeichen umkert, d. h. in die entgegengeſetzten verwandelt nach §. 109. Alſo ſo:

— 4 Rthl.	— 4 Rthl.	— 4 Rthl.	ſubtr.
$+$	$+$	$+$	Zeichen umgekert und addirt
$+$ 4 Rthl.	$+$ 4 Rthl.	$+$ 4 Rthl.	

Alſo kommen hier $+$ 12 Rthl. heraus, wie vorher.

Mann kann den Fleis eines Schülers $+$ Fleis oder $+$ F; den Unfleis aber durch — Fleis, oder — F ausdrüken.

Wenn nun ein Lerer dreimal anmerkt, daß ein Schüler viermal Fleis bewieſen habe, ſo iſt dis ſo auszudrüken

$+$ 4 F
$+$ 4 F   oder $+ 4\,F \times + 3 = 12\,F.$
$+$ 4 F
———
$+$ 12 F

Wenn er aber zu drei verſchiednen malen verneinet, daß der Schüler viermal unfleiſig geweſen ſei, iſt das nicht eben ſo viel, als dreimal angemerkt, daß er viermal fleiſig geweſen?

Alſo:

Alſo:

— 4 F verneinet	=	+ 4 F bejahet
— 4 F verneinet	=	+ 4 F bejahet
— 4 F verneinet	=	+ 4 F bejahet
— 12 F verneinet	=	+ 12 F bejahet

Eben dieſes wär aber auch ſo auszudrüken geweſen.

— 4 F — 1 mal	=	+ 4 F + 1 mal
— 4 F — 1 mal	=	+ 4 F + 1 mal
— 4 F — 1 mal	=	+ 4 F + 1 mal
— 4 F — 3 mal	=	+ 4 F + 3 mal
d. i. — 4 F — 3 mal	=	+ F 12 mal, oder + 12 F.

250.

Dritter Fall. Wenn einer von beiden Factoren das Zeichen +, der andre — hat.

Wenn + 4 Rthl. mit — 3 multiplicirt werden ſollen, ſo ſollen + 4 Rthl. dreimal aufgehoben, oder verneinet werden; d. h. + 4 Rthl. mit — 3 multiplicirt gibt — 12 Rthl.

Eben ſo wenn — 4 Rthl. mit + 3 multiplicirt werden ſoll, ſo ſollen — 4 Rthl. dreimal bejahet werden; das heiſt — 4 Rthl. mit + 3 multiplicirt gibt — 12 Rthl.

Alſo + a mit — b, oder — a mit + b multiplicirt, gibt zum Product — ab.

251.

Es iſt alſo klar, wenn einer von beiden Factoren +, der andre — hat, ſo hat das Product —, oder + mit — multiplicirt gibt —; d. h. plus mit minus multiplicirt gibt minus.

252.

Die drei Regeln §. 245. 248. 251. kann mann kürzer ſo ausdrüken:

Bei

Bei der Multiplication entgegengeſetzter Gröſen geben einerlei Zeichen (+ mit +, und — mit —) plus; und verſchiedne Zeichen (+ mit —) geben minus.

253.

Beiſpiele der Multiplication mit entgegengeſezten Zeichen.

1) Der Vermögenszuſtand eines Menſchen betrage 10 Rthl. Vermögen und 5 Rthl. Schulden, 8 Rthl. Vermögen und 6 Rthl. Schulden, 9 Rthl. Vermögen und 10 Rthl. Schulden. Nun komme einer und ſage, er wolle dieſes Menſchen ganzen Vermögenszuſtand 5 mal ſezen und 2 mal aufheben; ſo heiſt dis

$$10 - 5 + 8 - 6 + 9 - 10$$

mit $5 - 2$ multipliciren.

d. i. $-20 + 10 - 16 + 12 - 18 + 20$
$+ 50 - 25 + 40 - 30 + 45 - 50$

addirt gibt das ganze Product $+ 177 - 159 = 18$.

Daß dis richtig gerechnet ſei, erſieht mann, wenn mann bedenkt

daß $10 - 5 + 8 - 6 + 9 - 10 = 6$
ferner $5 - 2 = 3$
Product 18

Alſo $a - b + c - d + e - a$
multiplicirt mit $a - f$

gibt $- af + bf - cf + df + af$
$+ aa - ba + ca - da + ea - aa$

$+ bf + ca + ea - cf - ba - da$
oder $bf + (c + e)a - cf - (b + d)a$

2) Wenn jemand 6 Rthl. Vermögen, 4 Rthl. Schulden, 8 Rthl. Vermögen, 9 Rthl. Schulden, 3 Rthl. Vermögen, 8 Rthl. Schulden hat; und ein andrer das erſtemal ſeine Schulden ſo wol als das Vermögen 6 mal gröſſer macht; ein andermal aber ſein Vermögen ſowol als ſei-

ſeine Schulden ihm 4 mal abnimmt; wie viel wird am Ende herauskommen?

$$\begin{array}{r} 6 - 4 + 8 - 9 + 3 - 8 \\ 6 - 4 \\ \hline -24 + 16 - 32 + 36 - 12 + 32 \\ 36 - 24 + 48 - 54 + 18 - 48 \\ \hline -48 + 72 + 16 - 54 - 12 + 18 \end{array}$$

d. i. + 106 — 114 = — 8 oder 8 Rthl. Schulden.

Welches auch ſo gefunden wird:

Vermögen im Anfange war	Schulden waren
6	4
8	9
3	8
17 Rthl.	21 Rthl.
6 mal geſezt	6 mal geſezt
102 Rthl.	126 Rthl.
68 Rthl. = 4 mal weggenommen 17 Rthl.	84 = 4 mal 21 Rthl. weggenommen
ſubtr.	ſubtr.
blieben 34 Rthl. Vermögen.	blieben 42 Rthl. Schulden.

Alſo: 42 Rthl. Schulden
34 Rthl. Vermögen

bleiben 8 Rthl. Schulden

254.

Gleiches mit gleichem multiplicirt, gibt gleiche Producte.

Und das gröſſere mit dem gleichen Factor multiplicirt, gibt ein gröſſeres Product, als das kleinere mit dem gleichen Factor multiplicirt.

X.
Von Parallellinien.

255.

Parallellinien (lineae parallelae) heiſen gerade linien, die in einerlei Ebene liegen, und auf beiden Seiten, ſo weit mann will, verlångert werden kånnen, one jemals zuſammen zu ſtoſen.

256.

Wenn zwei gerade linien eine dritte durchſchneiden, ſo entſtehn verſchiedene Winkel, die hier mit beſondern Namen genannt zu werden verdienen.

Wir wollen die linie, welche von zwei andern durchſchnitten wird, die Grundlinie, und die beiden durchſchneidenden die Durchſchnittslinien nennen.

Hier iſt nun leicht einzuſehn, daß beide Durchſchnittslinien auf der Grundlinie jede ein paar Nebenwinkel machen, wovon einer auſer den beiden Durchſchnittslinien liegt, der andre innerhalb derſelben.

Der Winkel, der, wenn zwei linien eine dritte durchſchneiden, auſerhalb beider Durchſchnittslinien liegt, heiſt ein åuſerer Winkel;

Der Winkel aber, der, wenn zwei linien eine dritte durchſchneiden, innerhalb beider Durchſchnittslinien liegt, heiſt ein innerer Winkel.

Z. E. Tab. V. Fig. 46. 47. 48. ſind AB, CD die Durchſchnittslinien, EF, die Grundlinien, o und x ſind innere, n und y ſind åuſere Winkel.

257.

Die beiden innern Winkel, wovon der eine diſſeits der Grundlinie oben, der andre jenſeits der Grundlinie unten liegt, heiſen Wechſelswinkel (anguli alterni).

Z. E. Fig. 46. 47. und 48. ſind s und o, c und x Wechſelswinkel.

258.

Wenn zwei gerade linien eine dritte dergeſtalt durchſchneiden, daß der äuſere Winkel dem innern gleich iſt, ſo ſind die Durchſchnittslinien einander parallel.

Tab. V. Fig. 47. 48. iſt der äuſere Winkel y dem innern x gleich; wie vorausgeſezt wird. Daraus ſoll folgen, daß AB und CD einander parallel ſind.

Beweis. Nr. I. Wenn die beiden Winkel x und y, die ihre Spizen nach der nemlichen Seite zu keren, mit ihren Schenkeln nach B und D zu zuſammenſtoſen ſollten, ſo daß z. B. yD den Schenkel xB irgendwo durchſchnitte, ſo müßten die Winkel x und y notwendig ungleich ſein.

Nun ſind aber hier dieſe Winkel x und y einander gleich; (nach der Vorausſezung).

Alſo können die Schenkel derſelben xB und yD niemals zuſammenſtoſen; oder welches nach der Figur einerlei iſt, die linien AB und CD können nach der Seite B und D zu niemals zuſammenſtoſen.

Nr. II. Wenn aber der Winkel x dem Winkel y gleich iſt, ſo folgt auch, daß der Winkel m dem Winkel c gleich ſein muß.

Denn

Denn	$x = m$	§. 202.	
und	$c = y$	§. 202.	
folglich	————		addirt
iſt	$x + c = m + y$		
nun aber	$x = y$	ſubtr.	
folglich	$c = m$.		

Nr. III. Wenn nun aber der Winkel c in dieſem Falle dem Winkel m gleich iſt, wie eben nr. II. erwieſen worden, ſo iſt nach der Seite A und C der nemliche Fall, wie nr. I. Es können nemlich nun auch xA und yC nicht zuſammenſtoſen, weil ſonſt die Winkel m und c ungleich ſein müßten; da ſie nun aber gleich ſind, (nach nr. II.) ſo können xA und yC nicht zuſammenſtoſen, oder welches einerlei iſt, die Linien AB und CD können nach der Seite A und C nicht zuſammenſtoſen.

Nr. IV. Folglich können, wenn die Winkel x und y oder der äuſere und innere Winkel gleich ſind, die Linien AB und CD nicht nach B und D zuſammenſtoſen (nach nr. I.)

aber auch nicht nach A und C (nach nr. III.)

Alſo können ſie nach keiner Seite zuſammenſtoſen, und ſind folglich Parallellinien; W. Z. E. W.

259.

Wenn zwei gerade Linien eine dritte dergeſtalt durchſchneiden, daß ein Wechſelswinkel dem andern gleich iſt, ſo ſind die Durchſchnittslinien einander parallel.

Vorausſezung. $s = o$.

Saz. AB iſt CD parallel.

Beweis.

$$\begin{array}{l} s + x = 2\,R.\ \S.\ 199. \\ o + y = 2\,R.\ \S.\ 199. \\ \hline s + x = o + y \\ \quad s = o \quad \text{(nach der Vorausſ.)} \\ \hline \quad \text{ſubtr.} \end{array}$$

folglich $x = y$

Alſo wenn die Wechſelswinkel einander gleich ſind, wie vorausgeſezt wird, ſo iſt auch der äuſere dem innern gleich.

Nr. II. Wenn die Wechſelswinkel s und o einander gleich ſind, ſo iſt auch der äuſere dem innern gleich oder $x = y$.

Nun aber, wenn die Winkel x und y, oder der äuſere und innere einander gleich ſind, ſo ſind die Linien AB und CD einander parallel (§. 258. welcher hier zu wiederholen iſt).

Alſo wenn die Wechſelswinkel s und o bei zwei Linien, die eine dritte durchſchneiden, gleich ſind, ſo ſind dieſe beiden Linien AB und CD einander parallel.

260.

Wenn zwei gerade Linien eine dritte dergeſtalt durchſchneiden, daß die beiden innern Winkel zuſammen zwei rechten oder 180 Grad gleich ſind, ſo ſind die beiden geraden Linien einander parallel.

Vorausſezung. $x + o = 2\,R.$

Saz. AB und CD ſind parallel.

Beweis.

Beweis. $x + o = 2R.$ (nach der Voraus-
ſezung)

$$
\begin{array}{l}
o + y = 2R. \ (\S.\ 199.) \\
\hline
x + o = o + y \\
o = o \\
\hline
\end{array} \text{ ſubtr.}
$$

folglich $x = y.$

Alſo wenn die beiden innern Winkel x und o zuſammen zwei rechten gleich ſind, ſo iſt auch der äuſere Winkel y dem innern x gleich.

Und wenn dieſes iſt, ſo ſind AB und CD parallel; (nach §. 258.)

Folglich, wenn die beiden innern Winkel x und o zuſammen zwei rechten gleich ſind, ſo ſind die beiden Linien AB und CD einander parallel.

261.

Wenn zwei Linien eine dritte ſchneiden, ſo kann mann auch eben ſo gut ſagen, daß die dritte jene beiden ſchneide. Alſo kann mann auch die drei Säze §. 258. bis 260. ſo ausdrüken: Wenn zwei gerade Linien von einer dritten durchſchnitten werden, und

a) der äuſere Winkel dem innern gleich,

b) die Wechſelswinkel einander gleich,

c) die beiden innern Winkel zuſammen zwei rechten gleich ſind,

ſo ſind die beiden geraden Linien einander parallel.

262.

Wenn mann alſo wiſſen will, ob zwei gerade Linien einander parallel ſind, ſo darf mann nur eine gerade Linie

nach Belieben von einer zur andern ziehn, oder beide nach Belieben ſchneiden laſſen; ſodann darf mann eine von den erwähnten Bedingungen unterſuchen; findet mann nun

entweder, daß der äuſere Winkel dem innern gleich,

oder zwei Wechſelswinkel einander gleich,

oder zwei innere Winkel zuſammen zwei rechten gleich ſind,

ſo weiß mann auch gewiß, daß beſagte gerade Linien einander parallel ſind.

263.

Aus dem, was oben §. 159. ff. bei Erklärung der Winkel geſagt worden, erhellet:

1) Daß, wenn zwei Winkel, mit ihren Spizen nach der nemlichen Seite zugekeret, auf einer geraden Linie ſtehn, und beide Winkel gleich ſind, ſie ſich einander deken müſſen, folglich wenn der äuſere Winkel DCE nach dem innern ABC geſchoben würde, CD auf AB fallen, und wenn mann AB = DC macht, der Punkt D nicht eher auf A fallen könne, als der Punkt C auf B fällt.

2) Wenn aber der äuſere Winkel DCE Fig. 51. kleiner wäre, als der innere ABE, ſo würde, wenn mann die Spize C auf B legte, die Seite CD nicht auf AB, ſondern noch diſſeits nach BE zu innerhalb der Oefnung von ABE hereinfallen; oder: wenn mann den kleinern Winkel DCE auf BE fortſchieben wollte, würde der Punkt C eher auf B fallen, ehe ſonſt ein Punkt in CD auf einen andern Punkt in AB fallen würde; und insbeſondre würde alſo auch, wie ganz augenſcheinlich iſt, die Spize C eher auf B fallen, ehe D auf A fiele.

3) Wä-

3) Wäre aber der äuſere Winkel DCE Fig. 52. gröſſer als der innere ABC, ſo würde, wenn mann den Winkel DCE auf BE fortſchieben wollte, um ſeine Spize C auf die Spize B zu bringen, notwendig die Seite BA des äuſern Winkels eher die Seite des innern Winkels CD ſchneiden, ehe die Spizen auf einander fielen.

264.

Dieſe Säze ſind auch umgekert richtig:

1. Wenn von zwei Winkeln auf einer geraden Linie, die mit ihren Spizen nach der nemlichen Seite zugekert ſind, in eben der Zeit, da die Spize des äuſern Winkels DCE auf die Spize des innern fällt, auch die Seite DC und AB einander deken, ſo ſind die Winkel einander gleich.
2. Wenn die Spize des äuſern Winkels, indem er nach der Spize des innern geſchoben wird, eher mit der Spize des innern zuſammenfällt, als die Seite des äuſern CD von der Seite des innern AB irgendwo ſonſt berüret, oder geſchnitten wird, ſo iſt der äuſere Winkel kleiner als der innere.
3. Wenn die Seite des äuſern Winkels CD, indem er nach der Spize des innern geſchoben wird, eher von der Seite des innern Winkels AB geſchnitten wird, ehe ihre Spizen C und B zuſammenfallen, ſo iſt der äuſere Winkel gröſſer als der innere.

265.

Mann gebe nun vorizt beſonders auf dieſe beiden Säze Achtung.

1. Wenn unter zwei Winkeln, die auf der nemlichen linie ſo ſtehn, daß ſie mit ihren Spizen nach einerlei Seite gekeret ſind, der äuſere Winkel gröſſer iſt, als der innere, ſo muß die Seite des innern Winkels AB, wenn ſie gehörig verlängert wird, die Seite CD, wenn ſie ebenfals, ſo weit es nötig iſt, verlängert wird, ſchneiden.

Tab. V. Fig. 53.

Denn da nach §. 263. num. 3. die Seite CD des äuſern Winkels, wenn er gröſſer iſt als der innere, notwendig die Seite BA antreffen, oder von ihr geſchnitten werden muß, dafern er nach der Spize B geſchoben würde, ſo neme mann an, es werde CD von BA gerade in dem Endpunkte der linie A geſchnitten. Nun kann aber BA jenſeits CD verlängert werden, ſo weit als mann will; und wenn mann alſo nun mit CD bis nach cd fortrükt, ſo wird cd von BA bei o geſchnitten werden; und ſo immer fort, fals nur, wo es nötig iſt, CD oder BA verlängert werden.

2. Eben ſo umgekert, wenn die Seite des innern Winkels verlängert die Seite des äuſern ſchneidet, ſo muß der äuſere Winkel gröſſer ſein als der innere. §. 264. n. 3.

266.

Eine gerade linie, die in der Fläche eines Winkels durch irgend einen Punkt innerhalb ſeiner Seiten gezogen wird, ſchneidet allezeit wenigſtens eine dieſer Seiten, vorausgeſezt, daß die gerade linie ſowol, als die Seiten des Winkels, wo es erforderlich iſt, verlängert werden.

Es iſt Fig. 49. in der Fläche des Winkels AEB ein Punkt H gegeben, und durch denſelben nach Belieben zwiſchen

ſchen den Seiten dieſes Winkels die Linie CD gezogen worden. Daß dieſe Linie hier zwiſchen den Seiten, oder innerhalb der Oefnung des Winkels AEB liege, würde mann offenbar ſehn, wenn mann die Seiten des Winkels AEB verlängern wollte, welches mann allzeit thun kann, ſo weit als mann will.

Es ſoll nun bewieſen werden, daß eine jede ſolche innerhalb der Oefnung eines Winkels gezogne gerade Linie, verlängert, wenigſtens eine von den Seiten des Winkels ſchneiden werde.

Beweis. Aus dem Punkte E, oder der Spize des Winkels kann mann nach jedem andern Punkte eine gerade Linie ziehn. Folglich kann mann auch nach jedem Punkte der Linie CD aus E eine gerade Linie ziehn.

Mann ziehe alſo z. E. eine ſolche Linie EF, welche die Linie CD in F ſchneidet.

Hier entſteht nun ein Winkel BEG, und ein andrer DFG. Beide entſtehn, indem die Linien EB und FD von EG geſchnitten werden, und BEG iſt der innre, DFG aber der äuſere Winkel.

Es iſt offenbar, daß der äuſere Winkel DFG dem innern entweder gleich, oder gröſſer, oder kleiner ſein muß, als der innere BEG.

Geſezt 1. der äuſere Winkel DFG ſei gröſſer als der innere BEG, ſo muß die Seite EB, wenn ſie gehörig verlängert wird, notwendig die ebenfals gehörig verlängerte FD ſchneiden. §. 265. Num. 1.

Geſezt 2. der innere Winkel BEG ſei dem äuſern DFG gleich, ſo wird zwar BE von FD nicht geſchnitten werden; dafür wird aber doch die nach C zu verlängerte Linie CD die andre Seite AE ſchneiden.

Denn

Denn man verlängere EB nach K, ſo iſt gewiß, daß
KEA + AEG + BEG = 2 R.
und folglich AEG + BEG < 2 R. d. h. kleiner ſei, als zwei rechte.

Nun iſt aber DFG + CFG = 2 R,
und folglich iſt
die Summe DFG + CFG gröſſer als AEG + BEG
Nun iſt aber DFG = BEG
Folglich wenn mann auf
beiden Seiten abzieht

CFG gröſſer als AEG.

Da nun dieſes iſt, ſo iſt der Fall wieder wie vorher auf der andern Seite. Nemlich der äuſere Winkel CFG iſt gröſſer als der innere AEG, und alſo müſſen die Linien CD und AE einander ſchneiden, falls ſie gehörig verlängert werden. §. 266. Nr. 1.

Geſezt endlich 3. der äuſere Winkel DFG ſei kleiner als der innere BEG; ſo iſt wie Nr. 2.

KEA + AEG + BEG = 2R
folglich AEG + BEG < 2R
Nun iſt DFG + CFG = 2R
folglich DFG + CFG > AEG + BEG
Nun iſt DFG < BEG (nach der Vorausſ.)
folglich wenn mann auf
beiden Seiten abzieht

CFG > AEG

d. i. der äuſere Winkel CFG iſt gröſſer als der innere AEG, und alſo müſſen auch in dieſem Falle die Linien CD und AE einander ſchneiden. §. 266. Nr. 1.

Alſo 4. wenn eine gerade Linie innerhalb der Oefnung eines Winkels durch einen gewiſſen Punkt gezogen wor-

worden, ſo ſchneidet dieſe Linie wenigſtens eine von den Seiten des Winkels; nemlich die Seite EB in dem Falle Nr. 1, die Seite AE aber in den Fällen Nr. 2. und 3, und dies war eben dasjenige, was bewieſen werden ſollte.

267.

Parallellinien ſind ſolche Linien, die niemals zuſammenſtoſen, ob ſie gleich in einerlei Ebene liegen (§. 255.)

Nun müſſen zwei gerade Linien, die einander in einem Punkte näher ſind, als in dem andern notwendig endlich zuſammenſtoſen, wenn ſie in einerlei Ebene liegen.

Z. E. die Linien A B und C D Tab. V. Fig. 46. ſind einander in den Punkten A und C näher, als in den Punkten B und D; da ſie nun immer nach einerlei Richtung fortgehn müſſen, weil ſie gerade Linien ſind, ſo müſſen ſie auch immer fort ſich nähern, bis ſie endlich ganz zuſammenſtoſen. Oder welches einerlei iſt; ſie müſſen ſich ſo, wie ſie in den Punkten A und C weniger von einander entfernt ſind, als in den Punkten B und D, nach und nach immer weniger entfernen, bis ſie endlich ganz und gar nicht mer entfernt ſind, d. h. bis ſie zuſammenfallen.

Da nun Parallellinien niemals zuſammenſtoſen, ſo können ſie auch in keinem Punkte weiter von einander entfernt ſein, als in dem andern, ſondern müſſen beſtändig gleich weit von einander entfernet bleiben.

Der eben erwieſene Saz lautet mit andern Worten alſo: Parallellinien können einander niemals ſchneiden.

268.

Wenn zwo gerade Linien A B und C D einander parallel liegen, und eine dritte E F ſchneidet die eine davon A B, ſo muß eben dieſe E F auch die andre Parallellinie C D ſchneiden.

Beweis.

Beweis. Es iſt aus dem Anblik der Figur Tab. V. Fig. 54. deutlich, daß, indem die Linie EF die eine Parallellinie AB ſchneidet, ein Winkel AGF entſtehe, und daß mann die Linie CD als eine Linie anſehn könne, welche durch einen Punkt innerhalb der Oefnung dieſes Winkels gezogen worden.

Es muß alſo dieſe Linie CD, wenn ſie gehörig verlängert wird, notwendig eine von den Seiten des Winkels AGF ſchneiden.

Nun iſt es aber unmöglich, daß hier die Seite AG diejenige ſei, welche die Linie CD ſchneidet, denn Parallellinien können einander nicht ſchneiden, §. 267; und gleichwol iſt AG ein Theil der Parallellinie AB.

Alſo bleibt nichts übrig, als daß die andre Seite des Winkels AGF, nemlich die Seite GF, die Linie CD ſchneide.

Da nun die Seite GF ein Stük der Linie EF iſt, ſo iſt alſo auch erwieſen, daß dieſe Linie EF, welche die eine von zwei Parallellinien ſchneidet, verlängert auch die andre ſchneiden müſſe.

269.

Wenn eine gerade Linie gegeben iſt, und *ein Punkt*, durch welchen mann eine andre gerade Linie *mit jener parallel* ziehn ſoll, ſo iſt nur eine ſolche Linie durch den gegebnen Punkt zu ziehen möglich.

Tab. V. Fig. 54.

Geſezt, die Linie, welche durch den gegebnen Punkt G mit CD parallel gezogen worden, ſei AB; geſezt, mann wolle durch eben dieſen Punkt noch eine andre, welche mit CD parallel ſein ſolle, ziehn, z. E. EF, ſo ſchneidet dieſe EF notwendig die Linie AB; und da CD mit AB parallel, ſo muß auch dieſe EF die Linie CD ſchneiden. §. 268. Linien aber, die ſich ſchneiden, ſind nicht parallel; alſo kann auch CD nicht mit EF parallel ſein.

270.

Wenn zwo gerade parallele Linien von einer dritten geraden Linie geſchnitten werden, ſo ſind die Wechſelswinkel einander gleich.

Tab. V. Fig. 56.

Vorausſezung. A B iſt mit C D parallel.

Saz. Die Wechſelswinkel ſind einander gleich, oder AGK = GKD.

Beweis. Wenn die Wechſelswinkel AGK und GKD nicht gleich ſein ſollten, ſo müßten ſie ungleich ſein,

A. Nun können ſie aber nicht ungleich ſein. Alſo müſſen ſie gleich ſein.

Beweis des Sazes A.

Wenn die Wechſelswinkel A G K und GKD ungleich ſein ſollten, ſo müßte AGK entweder gröſſer oder kleiner ſein, als GKD;

Nun kann aber AGK

B. weder gröſſer ſein als GKD;

C. noch kleiner ſein als GKD.

Alſo können die Wechſelswinkel AGK und GKD nicht ungleich ſein.

Nr. I. Beweis des Sazes B.

Wenn AGK gröſſer ſein ſollte, als GKD; ſo müſte ein gewiſſer kleinerer Winkel z. E. HGK dem Winkel GKD gleich ſein.

a. Nun kann aber HGK dem Winkel GKD nicht gleich ſein.

Alſo kann auch AGK nicht gröſſer ſein, als GKD.

Beweis des Sazes a.

Wenn HGK dem Winkel GKD gleich wäre, ſo wären ein par Wechſelswinkel einander gleich. Folglich nach §. 258. die Linie HG mit CD parallel.

b. Nun kann aber HG mit CD nicht parallel ſein.

Alſo kann HGK dem Winkel GKD nicht gleich ſein.

Beweis

Beweis des Sazes b.

Wenn HG mit CD parallel ſein ſollte, da doch ſchon AB nach der Vorausſezung der CD parallel iſt, ſo müßten zwei Linien, die durch den nemlichen Punkt gehn, einer dritten parallel ſein. Das lezte aber iſt unmöglich, §. 269.

Alſo da AB mit CD parallel iſt, kann HG mit CD nicht parallel ſein.

Nr. II. Beweis des Sazes C. AGK kann nicht kleiner ſein als GKD.

Beweis. Wenn AGK kleiner ſein ſollte, als GKD, ſo müſte ein gewiſſer gröſſerer Winkel, als MGK, dem Winkel GKD gleich ſein.

c. Nun kann aber MGK dem Winkel GKD nicht gleich ſein.

Alſo kann auch AGK nicht kleiner ſein als GKD.

Beweis des Sazes c.

Wenn MGK dem Winkel GKD gleich ſein ſollte, ſo müßte, weil es Wechſelswinkel ſind, MG mit CD parallel ſein.

Dis kann aber nicht ſein. Denn es iſt ſchon AB mit CD parallel; und da MG ſo gut als AB durch den Punkt G geht, und AB von MG geſchnitten wird, ſo kann MG nicht mit CD parallel ſein.

Folglich kann auch der Winkel MGK dem Winkel GKD nicht gleich ſein.

Nr. III. Es iſt alſo nun bewieſen, daß, wenn zwei parallele gerade Linien von einer dritten geſchnitten werden, die Wechſelswinkel AGK und GKD gleich ſein müſſen,

weil AGK nicht gröſſer nach num. 1.
aber auch nicht kleiner ſein kann als GKD nach num. 2.

271.

Wenn zwo gerade parallele Linien von einer dritten geraden Linie geſchnitten werden, ſo iſt der äuſere Winkel dem innern gleich.

Tab. V.

Tab. V. Fig. 48. Vorausſezung. A B parallel mit C D. Saz. n = o.

Beweis. 1. Wenn A B parallel mit C D, ſo ſind nach §. 270. die Wechſelswinkel s und o einander gleich.

Nun ſind A B und C D parallel, nach der Vorausſezung.
Alſo s = o.

2. Es iſt nach No. 1. s = o
Nun iſt aber auch s = n §. 202.

folglich auch n = o

272.

Wenn zwo gerade parallele Linien von einer dritten geraden Linie durchſchnitten werden, ſo betragen die beiden innern Winkel zuſammen 180 Grad, oder ſind zween rechten gleich.

Vorausſezung. Tab. V. Fig. 48. A B mit C D parallel.

Saz. x + o = 2 R
Beweis. s + x = 2 R nach §. 199.
s = o nach §. 270.
alſo ſubſtituirt o für s

o + x = 2 R.

XI.

Erſte Gründe von Dreieken und Viereken.

273.

Eine Figur heiſt eine Fläche, die ringsherum begränzt, oder in Linien eingeſchloſſen iſt.

274.

Eine Figur in gerade linien eingeſchloſſen, heiſt eine geradlinichte Figur; iſt ſie aber in krumme linien eingeſchloſſen, ſo heiſt ſie eine krummlinichte Figur.

275.

Aus zwei geraden linien läßt ſich keine Figur machen.

Denn entweder berüren ſich die beiden geraden Linien gar nicht; und denn iſt der Raum auf beiden Seiten offen;

Oder ſie berüren einander in einem Punkte; da ſie entweder einen Winkel machen; alsdenn iſt der Raum auf einer Seite offen; oder aber eine fortlaufende gerade Linie machen, die auch keinen Raum einſchlieſen kann;

Oder endlich, ſie berüren ſich in allen Punkten, und fallen in einander; in dieſem Falle machen ſie beide nur eine einzige gerade Linie aus; die keinen Raum begränzen kann.

276.

Wenn zwei gerade linien ſo auf eine dritte geſezt werden, daß jede von beiden mit der dritten *einen* rechten Winkel einſchlieſt, ſo laufen *jene zwei parallel.* Tab. V. Fig. 55.

Die eine Linie ſei A C, die beiden, welche auf A C geſezt werden, ſind A B und C D. Nach der Vorausſezung ſollen ſie ſo auf A C geſezt werden, daß $x = R$, und $o = R$; d. i. daß x ſowol als o ein rechter Winkel ſei.

Es werden alſo hier die beiden Linien AB und C D von einer dritten A C dergeſtalt geſchnitten,

daß der innere Winkel $x = R$

der innere Winkel $o = R$

folglich in Summa die beiden innern Winkel $x + o = 2R$ oder zweenen rechten gleich ſind.

Folg.

Folglich müſſen die beiden Linien A B und C D parallel ſein.

277.

Wenn alſo zwei gerade Linien auf eine dritte, beide unter rechten Winkeln geſezt werden, ſo können ſie auf der andern Seite niemals zuſammenſtoſen, folglich auch da den Raum nicht begränzen; folglich kann auch aus drei ſolchergeſtalt zuſammengeſezten Linien keine Figur beſchrieben werden. §. 276.

278.

Wenn zwei gerade linien ſo auf eine dritte geſezt werden, daß die eine einen ſtumpfen, die andre einen rechten Winkel mit der dritten einſchlieſt, ſo kann keine Figur daraus beſchrieben werden.

Es ſei A C D Fig. 57. Tab. V. ein rechter, und B A C der ſtumpfe Winkel.

Da ein ſtumpfer Winkel gröſer iſt, als ein rechter, ſo läßt er ſich alzeit in einen rechten Winkel und einen andern abtheilen.

Geſezt alſo, der ſtumpfe Winkel ſei in den Winkel B A E und den rechten Winkel E A C durch die Linie E A abgetheilt.

Da nun alſo die Linie E A mit A C einen rechten Winkel, und C D mit A C auch einen rechten Winkel, nemlich A C D, einſchlieſet, ſo muß

No. 1. E A mit C D parallel ſein.

Mann verlängre die Linie A B nach Belieben, z. E. bis F; ſo macht die F A mit A E einen Winkel.

Innerhalb der Oefnung dieſes Winkels iſt die C D gezogen, durch den Punkt C.

Es muß alſo C D wenigſtens eine von den Seiten des Winkels F A E, alſo entweder F A oder E A ſchneiden.

Nun kann aber C D niemals E A ſchneiden, weil beide Linien parallel ſind nach No. 1.

Alſo muß F A die Linie C D ſchneiden, wenn C D gehörig verlängert wird.

Sollte nun auch A B die C D ſchneiden, ſo müßte eine gerade Linie die andere in mer als einem Punkte ſchneiden; weil nach der Vorausſezung F A und A B nur eine einzige gerade Linie ausmacht.

Es kann alſo die Linie A B, welche mit A C einen ſtumpfen Winkel macht, niemals die C D ſchneiden, wenn ſie mit A C einen rechten Winkel macht; alſo auch nie mit A C zuſammenſtoſen; folglich bleibt der Raum nach B und D offen. Und wenn demnach auf eine gerade Linie zwei andre, die eine unter einem ſtumpfen, die andre unter einem rechten Winkel geſezt werden, ſo kann daraus keine Figur beſchrieben werden.

279.

Wenn auf eine gerade Linie zwei andre ſo geſezt werden, daß die beiden eingeſchloſſenen Winkel zweien rechten gleich ſind, ſo kann auch daraus keine Figur beſchrieben werden, weil alsdenn die beiden Linien parallel ſind, und nicht zuſammenſtoſen, folglich der Raum an der einen Seite offen bleibt.

280.

Wenn auf eine gerade Linie zwei andre ſo geſezt werden, daß die beiden eingeſchloſſenen Winkel zuſammen mer als zwei rechte betragen, ſo kann daraus keine Figur beſchrieben werden.

Tab. V. Fig. 58.

Die Winkel E A C und A C D betragen gerade zwei rechte, und daher ſind A E und C D parallel.

Sollen nun aber die Seiten A E und C D mit A C zwei Winkel einſchlieſen, die gröſſer ſind als zwei rechte, ſo muß entweder E A C ſich mer öfnen, oder A C D, oder beide, ſo daß A E in A B, und C D in C F zu liegen kömmt.

Geſezt

Geſezt daß E A C ſich bis in A B öfne, ſo wird die Linie C D, wenn A B nach G verlängert wird, entweder die Seite A E oder A G ſchneiden. A E kann ſie nicht ſchneiden, weil ſie mit dieſer parallel iſt. Alſo muß ſie A G ſchneiden; z. E. in G oder einem andern Punkte nach G zu. Da nun A G und A B eine Linie ausmachen, dieſe Linie aber ſchon in G oder einem Punkte nach dieſer Seite zu, die Linie C D ſchneidet, ſo kann ſie ſie nicht nach B zu ſchneiden. Alſo können die Linien C D und A B nach B und D nicht zuſammenſtoſen.

Eben ſo wenig würde dis möglich ſein, wenn A C D ſich bis in C F öfnete; aus den nemlichen Gründen. Und wenn ſich beide Winkel z. E. E A C bis A B, und A C D bis C F öfneten, ſo würde auch denn nicht möglich ſein, daß A B und C D nach D und B zuſammenſtieſen.

Alſo, wenn auf eine gerade Linie zwei andre ſo geſezt werden, daß die beiden eingeſchloßnen Winkel zuſammen mer als zwei rechte betragen, ſo kann daraus keine Figur beſchrieben werden.

281.

Wenn alſo zwei Linien auf einer dritten ſtehn, ſo können ſie in folgenden Fällen keinen Raum begränzen:

1. Wenn jede mit der dritten einen rechten Winkel einſchliest.
2. Wenn die eine von beiden einen ſtumpfen, die andre einen rechten Winkel mit der dritten einſchliest.
3. Wenn beide mit der dritten ſtumpfe Winkel einſchlieſen.

282.

Ein jeder Winkel läßt ſich ſchlieſen, wenn mann die Endpunkte ſeiner Seiten, auſer der Spize des Winkels, durch eine Linie zuſammenzieht. Alsdenn entſteht eine Figur von drei Seiten, die mann ein Dreiek nennt.

283.

Geſezt nun A B C Tab. V. Fig. 59. ſei ein rechter Winkel, und mann wolle von A bis C eine Linie ziehn, ſo kann der Winkel A ſo wenig als C ein rechter Winkel ſein; §. 281. No. 1.

Es kann aber auch weder A noch C ein ſtumpfer Winkel ſein, §. 281. No. 2.

Alſo, wenn A B C ein rechter Winkel iſt, und mann will durch die Linie A C ein Dreiek daraus machen, ſo müſſen die beiden andern Winkel ſpiz ſein. Oder in einem Dreiek ann nicht mer als ein rechter Winkel ſein.

284.

Ein Dreiek, das einen rechten Winkel und zwei ſpize hat, heiſt ein rechtwinklichtes; ja weil die zwei ſpizen Winkel notwendig im Dreiek ſein müſſen, wenn einer von dreien ein rechter iſt, ſo iſt es zum Unterſchied genug, zu ſagen: ein rechtwinklichtes Dreiek, iſt ein Dreiek, das einen rechten Winkel hat.

285.

Geſezt A B C Tab. V. Fig. 60. ſei ein ſtumpfer Winkel, und mann wolle daraus, indem mann die Linie A C ziehe, ein Dreiek machen, ſo kann der Winkel A ſo wenig als C ein rechter, §. 281. No. 2. auch kann der Winkel A ſo wenig als C ein ſtumpfer ſein, §. 281. No. 3.

Folglich wenn ein Dreiek ein ſtumpfer Winkel iſt, ſo müßten die andern beiden ſpiz ſein; oder: im Dreiek kann nur ein einziger ſtumpfer Winkel ſein.

286.

Ein Dreiek mit einem ſtumpfen Winkel heiſt ein **ſtumpfwinklichtes** (triangulum obtuſangulum).

287.

Geſezt ABC Tab. V. Fig. 61. ſei ein ſpizer Winkel, ſo ſind die beiden andern Winkel

entweder ein rechter mit einem ſpizen §. 284.

oder ein ſtumpfer mit einem ſpizen §. 286.

oder zwei ſpize.

Im leztern Fall hat das Dreiek drei ſpize Winkel, und heiſt ein ſpizwinklichtes.

288.

Ein Dreiek hat entweder lauter gleiche Seiten, d. i. ein gleichſeitiges (triangulum aequilaterum), oder zwei gleiche Seiten, d. i. ein gleichſchenklichtes (triangulum aequicrurum), oder keine Seite der andern gleich, d. i. lauter ungleiche Seiten, d. h. ein ungleichſeitiges Dreiek (triangulum ſcalenum).

289.

Ein Dreiek iſt dem andern gleich, wenn es ſo viel Raum einſchliest, als das andre.

290.

Ein Dreiek iſt dem andern ånlich, wenn in beiden die gleichnamigen Winkel gleich ſind.

Gleichnamige Winkel heiſen aber die, welche in beiden auf einerlei Art liegen.

Z. E. der Winkel, der in beiden zwiſchen der långſten und kůrzeſten, oder zwiſchen der långſten und mitlern, oder zwiſchen der kůrzeſten und mitlern Seite liegt, heist gleichnamig.

291.

Es ſcheinet, daß ein Dreiek dem andern gleich ſein kỏnne, one ihm deshalb ånlich zu ſein.

Denn es kann ja auch ein Gefäs, das dem andern nicht ånlich ſieht, gleichwol eben ſo viel in ſich faſſen, als das andre.

Wir ſagen aber hier blos: Es ſcheinet; denn wir können es hier noch nicht beweiſen; alſo auch noch nicht ganz gewiß wiſſen; was mann aber nicht ganz gewiß weis, muß mann auch nicht ſo ſteif und feſt behaupten.

292.

Eben ſo ſcheinet es, daß ein Dreiek dem andern ånlich ſein kønne, one ihm deshalb gleich zu ſein.

Wie ein Miniaturportråt einem Menſchenkopfe ånlich iſt, one ihm deshalb gleich zu ſein,

293.

Wenn zwei Dreieke einander deken, ſo ſind

1) die Dreieke im Ganzen einander gleich,

2) die gleichnamigen Seiten den gleichnamigen Seiten gleich,

3) die gleichnamigen Winkel den gleichnamigen Winkeln gleich.

Anm. Dies erſieht mann am beſten, wenn mann Dreieke aus Papier oder Pappe ſchneidet, und ſie auf einander paſſet.

294.

Folglich wenn Dreieke einander deken, ſo ſind ſie einander nicht blos gleich, ſondern auch ånlich. Das wechſelſeitige Deken der Dreieke nennt mann auch ihre Congruenz; oder mann ſagt auch, zwei Dreieke ſind congruent anſtatt ſie deken einander.

295.

Erſter Lerſaz von der Congruenz der Dreieke.

Wenn in zwei Dreieken A B C und a b c ein Winkel A des einen, einem Winkel a des andern, und zwei Seiten A B und A C, die den gleichen Winkel A einſchlieſen, den zwei Seiten a b und a c, die den gleichen Winkel a ebenfals einſchlieſen, gleich ſind, ſo deken ſich dieſe Dreieke.

Tab. V. Fig. 62.

Vorausſezung 1. A = a
2. AB = ab
3. AC = ac.

Saz. Das Dreiek A B C iſt dem Dreiek a b c congruent.

Beweis. Weil A = a (Vorausſ. 1.)
ſo muß der Winkel A den Winkel a deken; d. h. wenn mann den Punkt A auf a paſſet, ſo muß der Schenkel A B über a b fallen, und umgekert.

Weil ferner A B = a b (Vorausſ. 2.)
ſo muß, wenn A auf a geleget worden, auch A B und a b einander deken; weil gerade Linien, die einander gleich ſind, allemal einander deken, wenn ſie auf einander gepaßt werden; es werden alſo auch ihre Endpunkte B und b zuſammenfallen.

Weil endlich A C = a c (Vorausſ. 3.)
ſo müſſen beide Seiten, da ſie onedem ſchon übereinander fallen, ebenfals einander deken; und alſo müſſen ihre Endpunkte C und c zuſammenfallen.

Weil nun in beiden Dreieken die Puncte B und b, und die Punkte C und c zuſammenfallen, ſo iſt nicht nur zwiſchen beiden Punkten B b und C c in beiden Dreieken gleiche Entfernung, und alſo die Seite B C = b c; ſondern es kann auch dieſe Seite in keinem von beiden ſich anders neigen, als in dem andern; weil ſie ſchlechterdings von den übereinander liegenden Punkten B b bis zu den gleichfals in einen zuſammen-

fallenden Punkten gezogen werden muß; zwiſchen zwei Punkten aber nur eine einzige gerade Linie möglich iſt.

Folglich deken ſich auch die Seiten B C und b c, die Winkel B und b, nebſt den Winkeln C und c.

Alſo ſind die ganzen Dreieke einander congruent.

296.

Wenn mann alſo in zwei Dreieken die Gleichheit zwoer Seiten mit dem eingeſchloßnen Winkel weis, ſo weis mann auch, daß die dritte Seite der dritten, der zweite Winkel dem zweiten, und der dritte dem dritten gleich ſein müſſe.

Und wenn folglich einem ein Winkel, und zwo Seiten, die den Winkel einſchlieſen ſollen, gegeben ſind, ſo läßt ſich daraus nur ein und eben derſelbe Triangel machen, das heiſt, wenn mann ihn auch hundertmal machen wollte, ſo würden alle hundert einander ganz gleich und änlich ſein.

297.

Zweiter Lerſaz von der Congruenz der Dreieke.

Wenn in zwei Dreieken A B C und a b c eine Seite A B einer Seite a b, und die Winkel C B A und B A C, welche die Seite A B einſchlieſen, den Winkeln c b a und b a c, welche die Seite a b einſchlieſen, gleich ſind, ſo deken ſich dieſe Dreieke.

Tab. VI. Fig. 63.

Vorausſezung. 1. A B = a b
2. Winkel C B A = c b a
3. Winkel B A C = b a c.

Saz. Das Dreiek A B C iſt dem Dreiek a b c congruent.

Be-

Beweis. Weil B A C = b a c, ſo fällt AB auf a b, und weil A B = a b, ſo deken ſich dieſe Seiten.

Es fällt aber auch A C auf a c; weil die Winkel B A C und b a c gleich ſind.

Nun iſt entweder A C der Seite a c gleich, oder ungleich.

Ungleich kann A C der Seite a c nicht ſein. Denn wenn dis wäre, ſo müßte entweder A C oder a c gröſſer ſein.

Mann neme an, A C ſei gröſſer.

So wird folgen, daß ein gewiſſer Theil von A C, zum Ex. A G, der a c gleich ſei.

Mann ziehe von dem Punkte G nach B eine Linie. Da nun alſo A G = a c ſein müßte, und nach der Vorausſ. 1. A B = a b, und (nach Vorausſ. 3.) der Winkel B A C = b a c, ſo wären in den Dreieken A G B und a c b zwei Winkel mit der eingeſchloßnen Seite gleich. Alſo wären die ganzen Dreieke A G B und a c b congruent. Folglich wären die Winkel G B A und c b a einander gleich. Da nun nach Vorausſezung 3. C B A auch c b a gleich iſt, ſo müßten auch G B A und C B A einander gleich ſein; welches ungereimt und unmöglich iſt.

Alſo kann A C der Seite a c nicht ungleich ſein.

Folglich muß A C = a c ſein.

Da alſo A C = a c und A B = a b (Vorausſ. 1.) und B A C = b a c, ſo ſind in dieſen Dreieken zwei Seiten nebſt dem eingeſchloßnen Winkel gleich; folglich nach §. 295. deken ſich dieſe Dreieke A B C und a b c.

298.

Mann kann dieſen Saz auch ſo einſehn. Wenn die Dreieke A B C und a b c ſich in ſo weit deken, daß ſich die Seite A B mit a b, und die Winkel C B A mit c b a und B A C mit b a c deken, welches geſchehn muß, wenn A B = a b, C B A = c b a, und B A C = b a c, wie hier vorausgeſezt wird; ſo

muß

muß ſich BC mit AC in eben dem Punkte ſchneiden, in welchem ſich bc mit ac ſchneidet; da nun die Punkte A und a für einen einzigen zu halten ſind, und eben ſo die Punkte B und b, ſo kann die Linie, die von A nach C gezogen wird, weder gröſſer noch kleiner ſein, als die, welche von a nach c gezogen wird; und eben ſo die Linie, die von B nach C gezogen wird, kann weder gröſſer noch kleiner ſein, als die von b nach c gezogene; weil C c der gemeinſchaftliche Durchſchnittspunkt beider Linien iſt.

Durch die Gleichheit der Winkel CBA und cba, ingleichen BAC und bac, iſt aber auch die Richtung der Linien BC, bc, und AC, ac gleich. Folglich müſſen BC und bc, AC und ac ſich deken; und der Winkel bei C dem bei c auch gleich ſein.

299.

Wenn mann alſo in zwei Dreieken die Gleichheit zweener Winkel, die eine Seite einſchlieſen, und die Gleichheit der eingeſchloßnen Seite in beiden kennt, ſo weis mann auch, daß der dritte Winkel dem dritten, und die beiden übrigen Seiten des einen den beiden übrigen des andern Dreieks gleich ſei.

Und wenn folglich einem zwei Winkel mit der eingeſchloßnen Seite gegeben ſind, ſo läßt ſich daraus nur ein und eben daſſelbe Dreiek machen, oder durch zwei Winkel und die eingeſchloßne Seite wird nur ein einziges Dreiek beſtimmt.

300.

Dritter Lerſaz von der Congruenz der Dreieke.

Wenn in zwei Dreieken ABC und abc eine Seite AB einer Seite ab gleich iſt, ein Winkel, der an der gleichen Seite liegt, BAC, einem Winkel bac, der auch an der gleichen Seite liegt, und ein Winkel ACB,

der

der der gleichen Seite gegenüber liegt, einem Winkel a c b, der auch der gleichen Seite gegenüber liegt, gleich iſt, ſo deken ſich dieſe Dreieke.

Tab. VI. Fig. 64.

Vorausſezung. 1. A B = a b
2. Winkel B A C = b a c
3. Winkel A C B = a c b.

Saz. Das Dreiek A B C iſt dem Dreiek a b c congruent.

Beweis. Weil A B = a b, ſo können beide auf einander gelegt werden und deken ſich.

Weil B A C = b a c (Vorausſ. 2.) ſo deken ſich dieſe Winkel, und die Seiten A C und a c kommen auf einander zu liegen. Ob ſich A C und a c deken, wird alſo dadurch entſchieden, wenn mann weis, ob ſie gleich oder ungleich ſein.

Es kann aber A C der a c nicht ungleich ſein.

Denn wenn es ſein ſollte, müßte A C oder a c gröſſer ſein.

Wäre A C gröſſer als a c, ſo müßte ein Theil von A C z. E. A D = a c ſein. Mann ziehe die Linie B D.

Wäre A D = a c, ſo müßte
weil auch A B = a b (V. 1.)
und B A C = b a c (V. 2.)
notwendig das Dreiek A B D = dem Dreiek a b c ſein;
Alsdenn wär auch der Winkel B D A = b c a,
da nun aber auch B C A = b c a (V. 3.)
ſo wäre B D A = B C A, welches aber unmöglich iſt.

Folglich iſt es auch unmöglich, daß A C gröſſer als a c ſei; und da auf gleiche Weiſe erwieſen werden kann, daß a c nicht gröſſer als A C ſein kann, ſo ſind folglich a c und A C gleich.

Da nun A C = a c wie eben bewieſen
A B = a b (V. 1.)
B A C = b a c (V. 2.)
ſo iſt in dieſen Dreieken ein Winkel mit zwo Seiten, die ihn einſchlieſen, gleich. Folglich deken ſich dieſe Dreieke.

301.

Mann kann die beiden Lerſäze §. 297. 300. in dieſen Einen zuſammenfaſſen.

Wenn in zwei Dreieken zween Winkel zweenen Winkeln, und eine Seite einer gleich iſt, ſo ſind die ganzen Dreieke congruent.

Und folglich wird durch zwei Winkel und eine Seite nur ein einziges Dreiek beſtimmt, oder wenn einem eine Seite und zwei Winkel gegeben ſind, ſo kann mann nur einerlei Dreiek daraus machen, ſo oft mann es auch wiederholen mag.

302.

Wenn in einem Dreieke A B C zween Winkel C A B und A C B einander gleich ſind, ſo ſind auch die Seiten, welche dieſen Winkeln gegenüberſtehn, nemlich A C und C B einander gleich. Tab. VI. Fig. 65.

Vorausſezung. C A B = C B A.

Saz. A C = C B.

Beweis. Wären A C und C B einander ungleich, ſo müßte eine von beiden die gröſſere ſein.

Mann neme an, A C ſei die gröſſere. So folgt, daß ein Theil von A C z. E. A D = C B ſein müſſe. Mann ziehe von D nach B eine Linie. Dadurch entſtehn zwei Dreieke B D C und A B D, und das Dreiek A B D iſt ein Theil von dem Dreiek A B C.

Nun iſt in beiden Dreieken A B = A B, der Winkel C A B = C B A (nach der Vorausſ.) und wenn nun auch A D = C B wäre, ſo wären zwei Seiten mit dem eingeſchloßnen Winkel gleich, folglich die ganzen Dreieke A B D und A B C gleich; welches unmöglich iſt, da A B D ein Theil von dem Ganzen A B C iſt, und ein Theil niemals ſo gros ſein kann als das Ganze. Alſo kann A D nicht C B gleich ſein, und ſo überhaupt B C nicht einem Theile von A C gleich ſein; das heiſt, A C kann nicht gröſſer ſein, als C B.

Da

Da nun auf eben dieſe Weiſe erwieſen werden kann, daß CB nicht gröſſer ſein kann, als AC;
ſo kann keine von beiden Seiten AB und AC gröſſer ſein, als die andre.

Folglich müſſen ſie einander gleich ſein. W. Z. E. W.

303.

Und folglich, wenn zwei Dreieke einander congruent ſind, ſo ſind allemal die Seiten gleich, die gleichen Winkeln gegenüberſtehn.

304.

Wenn in einem Dreieke ABC zwo Seiten AB und AC einander gleich ſind, ſo ſind auch die Winkel, welche dieſen Seiten gegenüber ſtehn, einander gleich, oder der Winkel ACB = CBA.

Tab. VI. Fig. 66.

Vorausſezung. AB = AC.

Saz. Winkel ACB = CBA.

Beweis. Wenn ACB und CBA einander ungleich ſein ſollten, ſo müſte einer von beiden Winkeln gröſſer ſein, als der andre.

Mann ſeze, ACB ſei der gröſſere, ſo müſte ein Theil dieſes Winkels z. E. DCB = CBA ſein.

Da nun durch die Linie DC zwei Triangel formiret werden, ſo wären

in dem Dreiek DCB		in dem Dreiek ABC	
Winkel DCB	=	CBA,	wie eben angenommen
DBC	=	ABC	weil jede Gröſſe ſich
Seite BC	=	BC	ſelbſt gleich

Folglich das Dreiek DCB dem Dreiek ABC congruent nach §. 301.

Folglich wär, da DCB = CBA wäre,
die gegenüberſtehende BD = der gegenüberſtehenden AC.

Da

Da nun auch AB = AC (nach der Vorausſ.)
ſo wär AB = BD, welches unmöglich iſt.

Alſo kann ACB nicht gröſſer ſein als CBA; da nun auf gleiche Weiſe erwieſen werden kann, daß CBA nicht gröſſer iſt, als ACB; ſo ſind beide Winkel einander gleich.

305.

Und folglich wenn zwei Dreieke einander congruent ſind, ſo ſind die gleichen Seiten entgegenſtehende Winkel gleich.

Anm. Dieſe Säze §. 303. 305. können noch leichter erwieſen, oder anſchaulicher gemacht werden, wenn mann Dreieke aus Papier ſchneidet, uud ſie auf einander paſſet.

306.

In jedem Dreieke z. B. ABC ſtehet der gröſſern Seite AC auch der gröſſere Winkel ABC gegenüber.

Oder wenn in einem Dreieke eine Seite AC gröſſer iſt, als eine andre, AB, ſo iſt auch der Winkel, der AC gegenüberſteht, nemlich ABC, gröſſer, als der Winkel, der AB gegenüberſteht, nemlich ACB.

Tab. VI. Fig. 67.

Vorausſezung. AC > AB
Saz. ABC > ACB.

Weil AC gröſſer iſt als AB, (nach d. V.) ſo kann mann von AC ein Stük nemen, welches AB gleich iſt.

Mann mache alſo AD = AB.

Und ziehe von B nach D die Linie BD.

Da nun AD = AB, ſo ſind in dem Dreiek ABD zwei Seiten gleich.

Folglich auch die entgegenſtehenden Winkel, oder
ABD = ADB §. 304.

Nun iſt ADB gröſſer, als ACB.

Folglich auch ABD gröſſer als ACB.

Folglich da ABD nur ein Theil von ABC iſt, ſo iſt ABC um ſo viel mer gröſſer als ACB.

307.

307.

Folglich ſteht auch im Dreieke der gröſten Seite der gröſte Winkel gegenüber.

308.

Wenn in einem Dreieke ein Winkel ABC gröſſer iſt, als ein andrer ACB, ſo iſt auch die Seite, welche dem gröſſern Winkel ABC gegenüber liegt, nemlich AC, gröſſer als die AB, welche dem kleinern Winkel ACB gegenüber liegt.

Tab. VI. Fig 67.

Vorausſezung. A B C > A C B.

Saz. A C > A B.

Beweis. Wenn A C nicht gröſſer ſein ſollte als A B, ſo müſte A C entweder der A B gleich, oder kleiner als A B ſein.

Nun kann aber

a. A C der A B nicht gleich ſein,

b. und A C auch nicht kleiner ſein als A B.

Alſo muß A C gröſſer ſein als A B.

Beweis des Sazes a. daß A C nicht = A B.

Wär AC = AB, ſo wär der Winkel ABC = ACB §. 304.

Da nun dis nicht ſein kann, weil (n. d. V.)

A B C > A C B

ſo iſt auch A C nicht = A B.

Beweis des Sazes b. daß A C nicht < AB.

Wär A C < AB, ſo wäre AB > A C.

Folglich der Winkel A C B > A B C.

Nun iſt aber nach der Vorausſezung ABC > ACB.

Folglich kann jenes nicht ſein; alſo auch A C nicht < A B d. h. nicht kleiner als A B ſein.

309.

Folglich liegt auch im Dreieke dem gröſten Winkel die gröſte Seite gegenüber.

Und alſo iſt in einem rechtwinklichten Triangel die gröſte Seite die, welche dem rechten Winkel, und in einem ſtumpfwinklichten die gröſte Seite die, welche dem ſtumpfen Winkel gegenüber liegt.

310.

In jedem Dreieke ſind jede zwo Seiten zuſammengenommen gröſſer als die dritte.

Tab. VI. Fig. 68.

Vorausſ. In dem Dreieke A B C verlängere mann B A nach D, und mache A C = A D; von D nach C ziehe mann die Linie D C.

Saz. Jede zwo Seiten des Dreieks ſind gröſſer als die dritte.

Beweis. Da A D = A C (n. d. V.)
ſo iſt im Dreiek A D C der Winkel A C D = A D C §. 304.
Da nun B C D gröſſer als A C D,
ſo iſt auch B C D gröſſer als A D C.
Folglich B D gröſſer als B C §. 308.
Und weil B D = B A + A D
n. d. V. aber A C = A D

ſo iſt auch B D = B A + A C.

Da nun vorher ſchon erwieſen
B D > B C
ſo iſt B A + A C > B C
oder die beiden Seiten B A und A C zuſammen ſind gröſſer als die dritte B C.

Da nun auf eben dieſe Art erwieſen wird,
daß A B + B C > A C
und B C + C A > A B
ſo ſind jede zwo Seiten eines Dreieks zuſammen gröſſer als die dritte.

311.

Mann kann ſich von dieſem Saze auch ſo überzeugen.

Wenn auf eine Linie in den zwei Endpunkten derſelben zwei andre geſezet werden, ſo ſind ſie entweder zuſammen gröſſer, als jene, oder zuſammen ihr gleich, oder zuſammen kleiner.

Wenn beide auf einer Linie in den Endpunkten aufgerichtete Linien zuſammen der Grundlinie gleich ſind, ſo werden ſie ſich über der Grundlinie nicht begegnen, folglich auch keinen

Raum

Raum ſchlieſen können. Neigt mann ſie beide nach der Grundlinie zu, ſo ſtoſen ſie nicht eher zuſammen, als bis ſie mit der Grundlinie, der ſie gleich ſind, ſich deken. Oefnet mann aber die Winkel an den Endpunkten wieder, ſo entfernen ſich die Punkte, wo ſie auf der Grundlinie zuſammenfielen, immer weiter von einander.

Sind aber zwei ſolche an die Endpunkte einer Linie geſezte Linien zuſammen kleiner, als jene, ſo ſtoſen ſie nicht einmal zuſammen, wenn ſie beide in die Grundlinie fallen, im übrigen iſt der Fall wie vorher.

Alſo müſſen notwendig zwei Linien, die an die Endpunkte einer Linie geſezt ſind, zuſammen gröſſer ſein als dieſe, wenn ſie über derſelben zuſammenſtoſen ſollen.

312.

Alſo iſt jede Seite im Dreiek kleiner als die Summe der beiden übrigen.

313.

Es iſt aber auch leicht einzuſehn, daß wenn mann im Dreiek eine Seite von der andern abzieht, die dritte gröſſer ſein müſſe, als das was übrig bleibt, oder als die Differenz von beiden.

Wenn die beiden andern Seiten einander gleich ſind, ſo iſt ihre Differenz = 0, oder es bleibt nichts übrig; da nun die dritte Seite, ſie mag ſo klein ſein als ſie will, doch etwas ſein muß, ſo iſt ſie alſo in dieſem Falle gröſſer als die Differenz der beiden andern, weil Etwas, wie ſich von ſelbſt verſteht, allemal mer iſt, als Nichts.

Sind aber die beiden andern Seiten einander ungleich, ſo iſt offenbar, daß wenn mann Tab. VI. Fig. 69. die kleinere A B an die gröſſere A C ſezt, dieſe gröſſere aus A B und noch etwas drüber beſtehn müſſe.

Mann beſchreibe alſo aus A einen Cirkel, den mann nicht eben ganz ausziehn darf; es iſt vielmer ſchon an dem Bogen genug, der zwiſchen A B und A C fällt.

Es iſt alſo A B = A F, und wenn mann demnach A B auf A C legen wollte, würde ſie bis in F reichen, und folg-

lich das Stük FC übrig laſſen. FC würde alſo die Differenz der beiden Seiten ſein.

Nun iſt $AB + BC > AC$ §. 310.

$$AC = AF + FC$$

Folglich $AB + BC > AF + FC$

$$AB \quad = AF \text{ (n. d. V.)}$$

$$AF + BC > AF + FC$$

$$AF \quad = AF \text{ ſubtr.}$$

$$BC > FC.$$

Das heiſt, die dritte Seite des Dreieks iſt gröſſer als die Differenz der beiden übrigen.

314.

Wenn an den Endpunkt einer geraden Linie, zwei gerade Linien AC und AD, die einander gleich ſind, und an den andern Endpunkt ebenfals zwei gerade Linien, BC und BD, die auch einander gleich ſind, dergeſtalt zuſammengeſtellt werden ſollen, daß AC und BC in einen, AD und BD aber auch in einen Punkt zuſammenfallen ſollen, ſo fallen ſie alle vier in einen einzigen zuſammen, und es iſt unmöglich, daß AD und BD in einem andern Punkte zuſammenſtoſen ſollten, als in eben dem, wo AC und BC ſich vereinigen.

Tab. VI. Fig. 70.

Vorausſezungen.
1. $AC = AD$
2. AC und AD haben auf AB einerlei Endpunkt.
3. $BC = BD$
4. BC und BD haben auf AB einerlei Endpunkt.
5. AC und BC ſtoſen in C zuſammen.

Saz. BC und BD müſſen auch in C zuſammenſtoſen.

Beweis. Wenn BC und BD nicht in C zuſammenſtoſen ſollten, ſo müßten ſie in einem andern Punkte zuſammenſtoſen, z. E. in D.

Mann

Mann ziehe von C nach D eine Linie CD.

Weil in dem Dreieke ACD AC = AD, (Vorausſ. 1.) ſo iſt auch der Winkel ADC = ACD.

Da nun ACD > BCD

ſo iſt auch ADC > BCD.

Da nun nach der Figur BDC > ADC

Nr. I. ſo iſt auch BDC > BCD

Ferner da BC = BD, ſo iſt in dem Triangel CDB der Winkel BDC = BCD.

Allein da nach Nr. I. der Winkel BDC > BCD

ſo iſt dis widerſprechend und unmöglich.

Folglich iſt es auch unmöglich, daß die Linien BC und BD in einem andern Punkte als in C zuſammenſtoſen.

Folglich müſſen BC und BD auch in C zuſammenſtoſen. W. Z. E.

315.

Vierter Lerſaz von der Congruenz der Dreieke.

Wenn in zwei Dreieken ABC und abc eine Seite AB der einen Seite ab, die zweite Seite BC der zweiten bc, die dritte AC der dritten Seite ac gleich iſt, folglich je drei Seiten des erſten Dreieks je drei Seiten des andern gleich ſind, ſo ſind die ganzen Triangel einander congruent.

Tab. VI. Fig. 71.

Vorausſezungen. 1. AB = ab

2. BC = bc

3. AC = ac.

Saz. Die Dreieke ABC und abc deken einander.

Beweis. Mann lege die Dreieke ABC und abc dergeſtalt aufeinander, daß AB auf ab zu liegen komme.

Weil nun AB = ab, ſo deken ſich dieſe Seiten, und haben einerlei Endpunkte Aa und Bb. Aus dieſen Endpunkten ſind nun auf der einen Seite die Seiten AC = ac, auf der andern BC = bc aufgerichtet; dieſe müſſen folglich in einem einzigen Punkte C zuſammenfallen; alſo dekt ſich auch AC

AC mit ac, und BC mit bc. Da nun aber der Endpunkt B mit b, die Seite Ab mit ab, und BC mit bc ſich deken, ſo deken ſich auch die Winkel ABC und abc.

Da ferner die Endpunkte C und c zuſammenfallen, und die Seiten AC mit ac und BC mit bc ſich deken, ſo deken ſich auch die Winkel ACB und acb.

Da endlich die Endpunkte A und a zuſammenfallen, und die Seiten AB mit ab, AC mit ac ſich deken, ſo deken ſich auch die Winkel CAB und cab.

Folglich deken ſich in den Dreieken ABC und abc, je drei Seiten uud je drei Winkel des erſten, mit je dreien Seiten und je dreien Winkeln des andern; alſo deken ſich die ganzen Dreieke. W. Z. E.

316.

Es kann alſo nun die Gleichheit und Aenlichkeit zweier Dreieke auf vierfache Weiſe erwieſen werden.

1) Wenn mann zeigen kann, daß in beiden zwei Seiten mit dem eingeſchloßnen Winkel gleich ſind.

2) Wenn mann erweiſen kann, daß in beiden zwei Winkel mit der eingeſchloßnen Seite gleich ſind.

3) Wenn ſich darthun läßt, daß in beiden zwei Winkel und eine Seite gleich ſind, ſo daß einer von den Winkeln der gleichen Seite gegenüberſteht.

4) Wenn zu beweiſen ſteht, daß in beiden Dreieken je drei Seiten gleich ſind.

317.

Mann kann in einem Dreieke zur Grundlinie annemen welche Seite mann will; in einem gleichſchenklichten Dreieke pflegt mann aber die ungleiche Seite die **Grundlinie** zu nennen.

318.

In einem gleichſchenklichten Dreieke ſind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Dieſer Saz iſt zwar ſchon oben mit andern Worten ausgedrükt bewieſen. Er

Er ſoll aber hier noch auf eine andre Art bewieſen werden.

Tab. VI. Fig. 72.

Vorausſezung. AB = AC.

Saz. o = x.

Beweis. Mann verlängre AB nach D, und AC nach E.

Mann neme einen Punkt in der Linie BD nach Belieben an; z. E. F, und mache auf der andern Linie AG = AF; und alſo

in dem Dreiek ACF		in dem Dreiek AGB	
AF	=	AG	
AC	=	AB	(Vorausſ.)
der Winkel BAC	=	BAC	
Folglich zwei Seiten mit dem eingeſchloßnen Winkel	=	zweien Seiten mit dem eingeſchloßnen Winkel	

Folglich das Dreiek ACF congruent dem Dreiek AGB.

Folglich auch

	in dem einen		in dem andern
nr. I.	Seite FC	=	GB
nr. II.	Winkel ACF	=	AGB
nr. III.	und AFC	=	AGB

Da ferner

AF = AG wie vorher

AB = AC (Vorausſ.)

——————— ſubtr.

ſo iſt AF — AB = AG — AC,

d. i. in der Figur:

nr. IV. BF = CG.

Und da nun in den Dreieken FBC und GCB

BF = CG nach nr. IV.

FC = GB nach nr. I.

Winkel AFC = AGB nach nr. III.

———————

ſo ſind die Dreieke FBC und GCB congruent,

 nr. V.

nr. V. folglich auch der Winkel FBC = GCB

nr. VI. und der Winkel BCF = CBG

Da nun der Winkel ACF = AGB nach nr. II.

und BCF = CBG

——————— ſubtr.

ſo iſt auch ACF — BCF = AGB — CBG

d. i. in der Figur

ABC = ACB

oder o = x.

319.

Da nun in einem gleichſeitigen Dreiek alle Seiten gleich ſind, ſo mag mann zur Grundlinie annemen welche mann will; es werden in jedem Falle die Seiten über der Grundlinie einander gleich ſein. Folglich auch in jedem Falle zwei Winkel an der Grundlinie einander gleich ſein. Und daraus folgt, daß in jedem gleichſeitigen Dreiek alle Winkel einander gleich ſein müſſen.

Tab. VI. Fig. 73.

Es ſei in dem gleichſeitigen Dreiek ABC die Grundlinie AB, ſo iſt AC = BC, folglich Winkel A = B. Es ſei aber BC die Grundlinie, ſo iſt, weil AB = AC auch Winkel B = C.

Alſo A = B

B = C

———

Folglich auch A = C.

Alſo alle drei Winkel einander gleich.

320.

Die Summe aller Winkel in einem Dreiek zuſammengenommen, iſt gleich zwei rechten Winkeln, oder 180 Grad.

Tab. VI. Fig. 74.

Vorausſezung. Mann ziehe durch die Spize B die Linie DF mit AC parallel.

Saz. n + o + m = 2 R oder 180 Grad.

Be=

Beweis. Weil DF mit AC parallel (Vorausſ.)
ſo iſt der Winkel $x =$ dem Winkel n
und eben ſo $y = m$
Nun iſt $x + o + y = 2$ R oder 180 Grad.
Folglich auch, da mann m für y, und n für x ſezen kann, $n + o + m = 2$ R oder 180 Grad.

321.

Wenn mann an einem Dreiek die eine Seite verlängert, ſo iſt der äuſere Winkel o den beiden entgegengeſezten innern x und y gleich.

Tab. VI. Fig. 75.

Saz. $o = x + y$.

Beweis. $o + n = 2$ R oder 180 Gr.
$n + x + y = 2$ R oder 180 Gr. §. 320.

Alſo $o + n = n + x + y$
$n = n$ ſubtr.

Folglich $o = x + y$.

322.

Weil in einem gleichſeitigen Dreiek alle Winkel einander gleich ſind, ſo muß ein jeder 60 Grad enthalten. Denn $60 + 60 + 60 = 180$.

323.

Wenn mann in einem gleichſchenklichten Dreiek nur einen Winkel weiß, ſo kann mann auch die übrigen finden.

Denn 1. wenn mann einen Winkel an der Grundlinie weiß, ſo weiß mann, daß der andre dieſem gleich ſein muß.

Wenn mann nun die beiden Winkel an der Grundlinie ſummiret, und die Summe von 180 abzieht, ſo iſt die Differenz der dritte Winkel.

Wäre z. E. der eine Winkel an der Grundlinie
45 Grad
ſo iſt der andre 45 Grad

Summe 90

und alſo von 180
  dieſe 90 abgezogen

muß der dritte Winkel 90 Gr. enthalten.

2. Wenn mann den Winkel über der Grundlinie weiß, ſo darf mann ihn nur von 180 Gr. abziehn: ſo hat mann die Summe der beiden übrigen; und da dieſe einander gleich ſind, ſo darf mann die Summe nur in zwei gleiche Theile theilen.

Es ſei der Winkel über der Grundlinie 86 Grad.

Mann ziehe von 180
  86 ab

ſo bleibt 94 die Summe der Winkel an der Grundlinie.

Da nun dieſe gleich ſind, und 47 + 47 = 94, ſo iſt jeder derſelben 47 Grad.

324.

In einem gleichſchenklichten Dreiek, das zugleich rechtwinklicht iſt, iſt jeder Winkel an der Grundlinie = 45 Grad.

Denn der rechte Winkel iſt = 90 Gr. Dieſen von 180 abgezogen, bleiben für die beiden an der Grundlinie 90; und da dieſe ſich gleich ſind, muß jeder 45 Grad *enthalten*, indem 45 + 45 = 90.

325.

In einem jeden Dreiek weiß mann den dritten Winkel, ſo bald mann die beiden andern weiß; denn mann darf die Summe dieſer beiden nur von 180 abziehn, ſo bleibt der dritte übrig.

326.

Wenn mann den äuſern Winkel an einem Dreiek weiß, ſo weiß mann auch wie viel Grad die beiden innern entgegenſtehenden enthalten; mann weiß aber auch den dritten, als den Nebenwinkel des äuſern.

327.

327.

Wenn mann in einem gleichſchenklichten Dreiek die eine von den gleichen Seiten verlängert, ſo iſt der äuſere Winkel noch einmal ſo gros, als einer von den entgegenſtehenden innern.

328.

Ein Vierek iſt eine Figur in vier gerade Linien eingeſchloſſen.

329.

Bei einem Viereke ſind entweder die gegenüberſtehenden Seiten einander gleich, oder nicht.

Jene heiſen Parallelogrammen, dieſe heiſen Trapezia.

330.

Ein Parallelogramm hat entweder rechte, oder ſchiefe Winkel.

Jenes heiſt ein rechtwinklichtes, dieſes ein ſchiefwinklichtes.

331.

Ein rechtwinklichtes Parallelogramm hat entweder lauter gleiche Seiten, oder nur die gegenüberſtehenden ſind gleich. Das erſte heiſt ein Quadrat, das andre ein Rechtek (Rectangulum).

332.

Ein ſchiefwinklichtes Parallelogramm hat entweder lauter gleiche Seiten, oder nur die gegenüberſtehenden ſind gleich. Das erſte heiſt ein Rhombus, oder eine Raute; das zweite ein Rhomboid, oder länglichte Raute.

333.

Die Diagonallinie heiſt die Linie, welche in einer Figur von einem Winkel zum andern gezogen wird.

334.

334.

Ein jedes Parallelogramm wird durch die Diagonallinie in zwei gleiche Theile getheilet.

Tab. VI. Fig. 76.

Vorausſ. ABCD iſt ein Parallelogramm, folglich AB=CD, und AC=BD.

Die Diagonallinie iſt AD; durch welche die Dreieke ACD und ABD entſtehen.

Saz. ACD= ABD.

Beweis. AB = CD } n. d. Vorausſ.
AC = BD
AD=AD

Folglich deken ſich die Dreieke ACD und ABD nach §. und ſind alſo gleich.

335.

Wenn in einem Vierek je zwo einander gegenüberſtehende Seiten gleich ſind, ſo ſind eben dieſe gegeneinander über ſtehenden Seiten auch parallel.

Tab. VI. Fig. 76.

Vorausſezung. 1. AC= BD.
2. AB = CD.

Saz. 1. AC iſt BD parallel.
2. AB iſt CD parallel.

Beweis vom 1. Saz.

Da AC = BD (V. 1.)
und AB = CD (V. 2.)
Ferner AD = AD

ſo ſind die Dreieke ABD und ACD einander congruent.

Folglich ſind die gleichen Seiten entgegenſtehenden Winkel einander gleich.

Da nun x der Seite BD, und y der Seite AC gegenüberſteht, welche Seiten gleich ſind, ſo iſt x = y.

Nun ſind x und y Wechſelswinkel an der Linie AD, welche die beiden Linien AB und CD ſchneidet.

Folglich ſind AB und CD parallel.

Be-

Beweis vom 2. Saz.

Die Dreieke ABD und ACD ſind congruent (wie vorher).

Alſo ſind die den gleichen Seiten gegenüberſtehenden Winkel gleich.

Da nun der Winkel o der Seite CD, und n der Seite AB gegenüberſteht, AB und CD aber gleich ſind (V. 2.), ſo iſt auch o = n.

Da nun o und n Wechſelswinkel ſind, ſo ſind AB und CD parallel.

336.

Auch umgekert, wenn in einem Vierek je zwo einander gegenüberſtehende Seiten parallel ſind, ſo ſind dieſe gegenüberſtehenden Seiten gleich.

Tab. VI. Fig. 76.

Vorausſezung. 1. AC iſt BD parallel
2. AB iſt CD parallel.

Saz. 1. AC = BD
2. AB = CD.

Weil AC parallel BD, (V. 1.) ſo iſt x = y,
und weil AB parallel CD, (V. 2.) ſo iſt o = n.

Alſo iſt

im Dreiek ACD		im Dreiek ABD
Winkel x	=	y
o	=	n
AD	=	AD

alſo zwei Winkel und eine Seite gleich, die von den Winkeln eingeſchloſſen wird.

Folglich ſind die Dreieke ACD und ABD congruent;
Folglich die den gleichen Winkeln
x und y entgegenſtehenden Seiten gleich, d. i. AC = BD,
eben ſo die den gleichen Winkeln o und n entgegenſtehenden Seiten gleich, d. i. AB = BD.

337.

In jedem Vierek iſt die Summe aller Winkel vier rechten gleich oder 360 Grad.

Denn

Denn jedes Vierek läßt ſich durch die Diagonallinie in zwei Dreieke abtheilen. Da nun die Summe der Winkel in jedem Dreieke zwei rechten gleich oder = 180 Grad iſt, ſo müſſen die vier Winkel des Viereks zuſammen vier rechten gleich, oder = 360 Grad ſeyn.

338.

Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter iſt, ſo ſind die übrigen auch alle rechte Winkel.

Tab. VI. Fig. 77.

Vorausſ. 1. AB parallel CD, und AC parallel BD.
2. o = Recto = 90 Gr.

Saz. 1. n = Recto
2. m = Recto
3. r = Recto.

Beweis des 1. Sazes.

o + n = 2 R oder 180 Gr.
o = R oder 90 Gr. (V. 2.)
——— ſubtr.
Nr. I. n = R oder 90 Gr.

Beweis des 2. Sazes.

n + m = 2 R oder 180 Gr.
n = R oder 90 Gr. nach Nr. I.
——— ſubtr.
Nr. II. m = R oder 90 Gr.

Beweis des 3. Sazes.

m + r = 2 R oder 180 Gr.
m = R oder 90 Gr. nach Nr. II.
——— ſubtr.
r = R oder 90 Gr.

339.

Folglich wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ſchief iſt, ſo müſſen ſie alle ſchief ſein. Und da die beiden, die an einerlei Linie ſtehn, immer zuſammen 180 Grad machen müſſen, ſo ſteht in einem ſolchen Parallelogramm allemal auf jeder Seite ein ſtumpfer und ein ſpizer Winkel; auch ſteht der ſpize dem ſpizen, und der ſtumpfe dem ſtumpfen gegenüber.

XII.
Aufgaben von Linien, Winkeln, Dreieken und Viereken.

340.

Auf eine gerade Linie AB ein gleichſeitiges Dreiek zu ſezen.

Tab. VI. Fig. 78.

Auflöſung. Beſchreibet aus dem Punkte A mit dem Radius AB einen Cirkel; eben ſo mit dem nemlichen Radius AB aus dem Punkte B einen Cirkel. Aus dem Punkte C, wo ſich beide Cirkel ſchneiden, zieht die geraden Linien CA und CB; ſo iſt ACB ein gleichſeitiges Dreiek.

Beweis. AC = AB, weil es Radii eines Cirkels
CB = AB aus eben dem Grunde

Folglich auch AC = CB.

Folglich ſind alle drei Seiten einander gleich.

Anm. Bei der Ausübung hat mann nicht nötig, die Cirkel ganz auszuziehn, ſondern darf nur mit dem Radius AB aus A und B ein par Bogen beſchreiben, und aus dem Punkte, wo ſie ſich ſchneiden, nach A und B Linien ziehn.

341.

Aus drei gegebenen Seiten ein Dreiek zuſammenzuſezen. Tab. VI. Fig. 79. ſind die Seiten a, b, c gegeben.

Auflöſung. Nemet eine von den gegebnen Seiten zur Grundlinie an; beſchreibet aus dem einen Endpunkte derſelben mit der andern Seite als einem Radius einen Cirkel, oder nur einen Bogen über der Grundlinie; hiernächſt beſchreibet aus dem andern Endpunkte mit der dritten Seite als einem Radius einen Cirkel, oder auch nur einen Bogen; aus dem Punkte, wo ſich beide Cirkel oder Bogen ſchneiden, ziehet nach den Endpunkten der Grundlinie gerade Linien, ſo iſt das Dreiek aus den gegebenen Seiten zuſammengeſezt.

Beweis. Iſt in dem Lerſaze §. 315. enthalten.

 Anm.

Anm. Es iſt einerley, welche Seite mann zur Grundlinie anneme, und welche der andern mann zur rechten oder linken Hand anſeze; das Dreiek bekömmt dadurch nur immer eine veränderte Lage; wie mann an Fig. 80. 81. 82. 83. 84. 85. ſiehet.

342.

An den Endpunkt einer Linie oder an jeden andern Punkt derſelben einen gegebnen Winkel zu ſezen.

Aufloſung. Der gegebne Winkel Tab. VI. Fig. 86. ſei ABC; ſo ziehet die Endpunkte oder jede zwei andre Punkte der Linien AB und BC zuſammen, daß daraus ein Dreiek aBc entſtehe. Ein eben ſolches Dreiek richtet (nach §. 341.) auf der Linie DE Fig. 87. auf; ſo wird der Winkel CDE dem Winkel ABC gleich ſein.

Beweis. Iſt in dem Lerſaze enthalten.

Auf andre Art läßt ſich dieſes ſo verrichten: Mann beſchreibe aus der Spize des Winkels ABC Fig. 86. mit beliebiger Eröfnung einen Bogen, der beide Schenkel erreiche, Cd; mit eben der Eröfnung beſchreibe mann Fig. 88. aus dem Endpunkte der Linie DE einen etwas gröſſern Bogen EG. Mann meſſe den erſten, und mache den leztern ihm gleich, und ziehe EC, ſo iſt CDE = ABC.

343.

Aus zwei gegebnen Seiten und einem von ihnen einzuſchlieſenden Winkel ein Dreiek zuſammenzuſezen.

Aufloſung. Die Seiten ſein A, B, der Winkel C. Nemet die Seite A zur Grundlinie, (es iſt aber auch gleichviel, ob B dazu genommen werde); ſezet den Winkel C (nach §. 342.) an den einen Endpunkt derſelben; machet hierauf die Seite des Winkels = der gegebnen Seite B; ziehet hierauf die Endpunkte zuſammen, ſo iſt das verlangte Dreiek beſchrieben.

Be-

Beweis. Im erſten Lerſaze von der Congruenz der Dreieke.

344.

Aus einer Seite und zwei gegebnen Winkeln, die die Seite einſchlieſen ſollen, ein Dreiek zu zeichnen.

Tab. VII. Fig. 89.

Aufloͤſung. Die Seite ſei A, die Winkel C und E. Zeichnet die Seite A, als die Grundlinie; traget zu beiden Seiten an den Endpunkten der Seite A die Winkel C und E auf; und verlaͤngert deren an der Seite A ſtehende Schenkel, bis ſie ſich ſchneiden; alsdann iſt das verlangte Dreiek beſchrieben.

Beweis. Im zweiten Lerſaze von der Congruenz der Dreieke.

345.

Aus einer Seite und zwei gegebnen Winkeln o und x, davon einer x der Seite gegenuͤber ſtehn ſoll, ein Dreiek zu zeichnen.

Tab. VII. Fig. 90. 91.

Aufloͤſung. Sezet die beiden gegebnen Winkel o und x auf eine gerade Linie zuſammen, daß ihre Spizen in einen Punkt fallen; alsdenn iſt der Winkel y der dritte Winkel des Triangels.

Nemet hierauf die gegebne Seite als die Grundlinie des Triangels, und ſezet an den einen Endpunkt den Winkel o, an den andern aber den Winkel y; verlaͤngert darauf die Schenkel der beiden Winkel auſer der Grundlinie, (wie §. 344.) bis ſie ſich ſchneiden; alsdenn iſt das verlangte Dreiek gezeichnet, und der Winkel x ſteht der Grundlinie gegenuͤber.

Beweis. Iſt in dem 3ten Lerſaze von der Congruenz der Dreieke enthalten.

346.

Aus einer gegebnen Grundlinie und einer Seite ein gleichſchenkliches Dreiek zu machen.

Tab. VII. Fig. 92.

Aufloͤſung. Aus jedem Endpunkte der Grundlinie A beſchreibet mit einer Eroͤfnung des Cirkels, welche der Seite B gleich iſt, einen Cirkel oder Bogen; aus dem Punkte, wo ſich die Cirkel oder Bogen ſchneiden, ziehet nach den Endpunkten der Grundlinie gerade Linien, ſo iſt das gleichſchenkliche Dreiek beſchrieben.

Beweis. §. 150.

347.

Eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Tab. VII. Fig. 93.

Aufloͤſung. Mit einerlei Eroͤfnung des Cirkels beſchreibet aus beiden Endpunkten der Linie, welche zu theilen iſt, ſowol uͤber als unter derſelben Bogen; durch die Punkte, in welchen ſich die Bogen ſchneiden, ziehet die gerade Linie BD, welche jene in zwei gleiche Theile theilet.

Beweis. Ziehet die Linien AB und BC, welche einander gleich ſein muͤſſen, weil es Radii eines Cirkels ſind. Eben ſo ziehet AD = DC.

Da nun AB = BC, AD = DC, BD = BD, ſo iſt das Dreiek BCD = ABD; folglich Winkel CBE = ABE.

Da nun auch in den Dreieken ABE und BCE AB = BC, BE = BE, und Winkel CBE = ABE wie vorher; ſo iſt auch Dreiek ABE = BCE; folglich AE = EC; und folglich AC in zwei gleiche Theile getheilet.

348.

Einen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflö-

Auflöſung. Mann mache die Schenkel des Winkels gleich, daß BA = BC; aus den Punkten A und C beſchreibe mann Bogen, die ſich in E ſchneiden, ſo daß CE = AE. Mann ziehe hierauf von B nach E die gerade linie BE.

Folglich iſt das Dreiek BAE = BCE,

weil BA = BC, AE = CE, BE = BE.

Und alſo iſt der Winkel ABE = EBC; folglich der Winkel B in zwei gleiche Theile getheilet.

349.

Auf eine gerade linie von einem in derſelben gegebnen Punkte B eine perpendiculäre oder ſenkrechte linie zu ziehn.

Tab. VII. Fig. 95.

Auflöſung. Mann neme auf der geraden linie ein kleines Stück aus dem gegebnen Punkte zu beiden Seiten, ſo daß eins dem andern gleich ſei; oder AB = BC.

Man ſeze auf die linie AC ein gleichſeitiges oder gleichſchenkliches Dreiek, und ziehe die linie BD, ſo wird dieſe auf AC perpendiculär ſtehn.

Beweis. Weil AB = BC, AD = CD, BD = BD, ſo ſind die beiden Dreieke ABD und CBD congruent; folglich die Winkel ABD und DBC gleich; folglich da ſie beide von einer linie BD gemacht werden, ſind ſie rechte Winkel; folglich ſteht BD auf AC perpendiculär.

350.

Auf eine gerade linie von einem Punkte A auſerhalb derſelben eine Perpendiculärlinie zu ziehen.

Tab. VII. Fig. 96.

Auflöſung. Man neme auf der andern Seite der linie CD einen beliebigen Punkt, z. E. B; und beſchreibe aus A durch B einen Cirkel. Mann theile hierauf die linie

CD in zwey gleiche Theile, daß CB = BD; mann ziehe die linie von A nach dem Punkte B, der die linie CD halbiret; dieſe linie AB ſteht auf CD perpendiculär.

Beweis. CB = BD weil ſie gleich gemacht worden
CA = AD weil es Radii eines Cirkels
AB = AB

Folglich das Dreiek CAB = ABD.
alſo die Winkel bei B einander gleich,
und folglich eben dieſelben rechte Winkel;
folglich ſteht AB auf CD perpendiculär.

351.

Auf das Ende einer geraden linie eine Perpendicularlinie aufzurichten.

Tab. VII. Fig. 97.

Aufloͤſung. Mann richte von dem Ende der linie AC oder von dem Punkte A aus, mit der beliebigen Weite AB, das gleichſeitige Dreiek ABD auf; mann verlängere BD ſo weit, bis ED = BD; von E nach A ziehe mann die linie EA, dieſe wird auf AB perpendiculär ſtehn.

Einen Beweis verſuche man ſelbſt zu finden.

352.

Eine gerade linie durch einen gegebnen Punkt mit der andern parallel zu ziehn.

Tab. VII. Fig. 98.

Aufloͤſung. Durch den Punkt D ſoll die linie mit AB parallel gezogen werden. Mann ziehe alſo aus D nach AB eine linie, z. E. DC; und mache hierauf einen Winkel bei D, nemlich CDF, der dem Winkel ACD gleich ſei; der Schenkel DF, folglich auch deſſen Verlängerung EF, wird AB parallel ſein.

Den Beweis ſuche mann in den Säzen von Parallellinien.

353.

Ein Quadrat mit einer gegebnen Linie zu beſchreiben.

Tab. VII. Fig. 99.

Aufloͤſung. Richtet auf die gegebne Linie AB den Perpendikel AC, und machet ihn = AB; aus C und B beſchreibet nach D zu Cirkelboͤgen, die einander ſchneiden; ziehet von C und B nach dem Durchſchnittspunkte D gerade Linien; ſo iſt das Quadrat beſchrieben.

354.

Aus zwo gegebnen Linien ein Rectangulum zu beſchreiben.

Tab. VII. Fig. 100.

Aufloͤſung. Nemet die eine gegebne Linie A, und richtet auf dieſelbe unter rechtem Winkel eine Linie auf, welche der andern gegebnen B gleich ſei. Beſchreibet hierauf aus dem andern Endpunkte der Linie A mit einem Radius = B, und aus dem andern Endpunkte der Linie B mit einem Radius = A, Cirkelbogen; den Punkt, wo ſich dieſe durchſchneiden, ziehet mit den Endpunkten von A und B zuſammen, ſo iſt das verlangte Rectangulum beſchrieben.

355.

Aus einem gegebnen Winkel und einer gegebnen Seite einen Rhombus zu beſchreiben.

Tab. VII. Fig. 101.

Aufloͤſung. Richtet auf der gegebnen Linie ab den Winkel a auf, und machet deſſen andern Schenkel der Linie ab gleich. Hierauf verfaret ferner, wie bey dem Quadrat gezeiget worden. §. 353.

356.

Aus einem gegebnen Winkel und zwo Seiten ein Rhomboid zu beſchreiben.

Tab.

Tab. VII. Fig. 102.

Auflöſung. Richtet auf der Seite ab die andre gegebne Seite ac unter dem gegebnen Winkel o auf; beſchreibet aus c mit dem Radius ab, und aus b mit dem Radius ac Cirkelbogen: den Durchſchnittspunkt derſelben ziehet mit den Punkten c und b durch gerade Linien zuſammen; ſo iſt das Rhomboid beſchrieben.

357.

Aus vier geraden Linien und einem Winkel, die gegeben ſind, ein Trapezium zu beſchreiben.

Tab. VII. Fig. 103. 104.

Auflöſung. Richtet auf der erſten gegebnen Linie a die zweite b unter dem gegebnen Winkel e auf; aus dem Endpunkte der Seite a beſchreibet mit dem Radius = der vierten gegebnen Linie d, und aus dem Endpunkte der Seite b beſchreibet mit dem Radius = der dritten Linie c, Cirkelbogen; den Durchſchnittspunkt derſelben ziehet mit den Endpunkten der Seiten a und b zuſammen.

Anmerkung. Es verſteht ſich, daß in jedem Viereke drei Seiten zuſammengenommen gröſſer ſind, als die vierte.

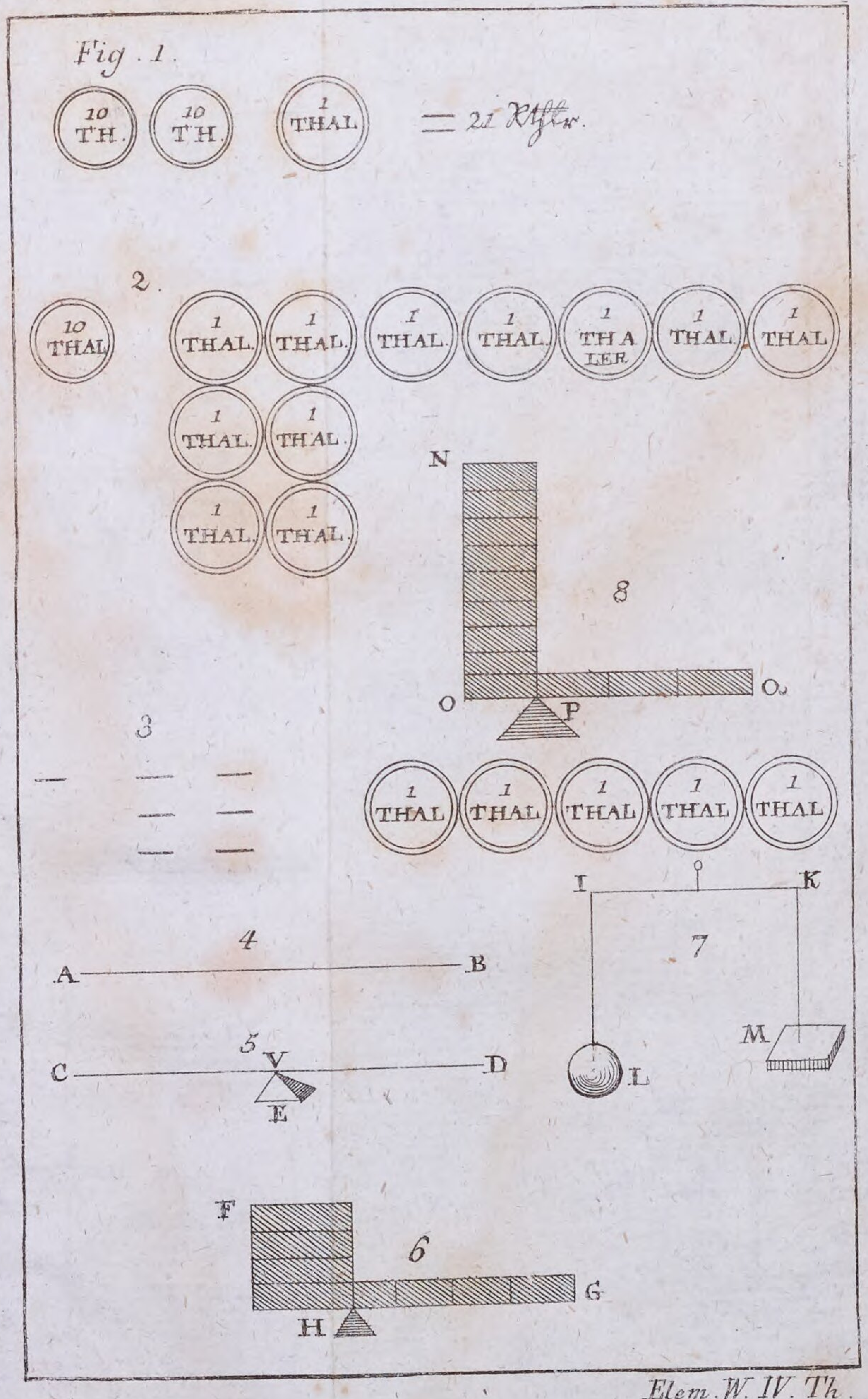


Fig. 1.
10 TH.
10 TH.
1 THAL
= 21 Rthlr.
2.
10 THAL
1 THAL.
1 THA LER
3
4
A
B
5
V
C
D
E
6
F
G
H
7
I
K
M
L
8
N
O
P
O.

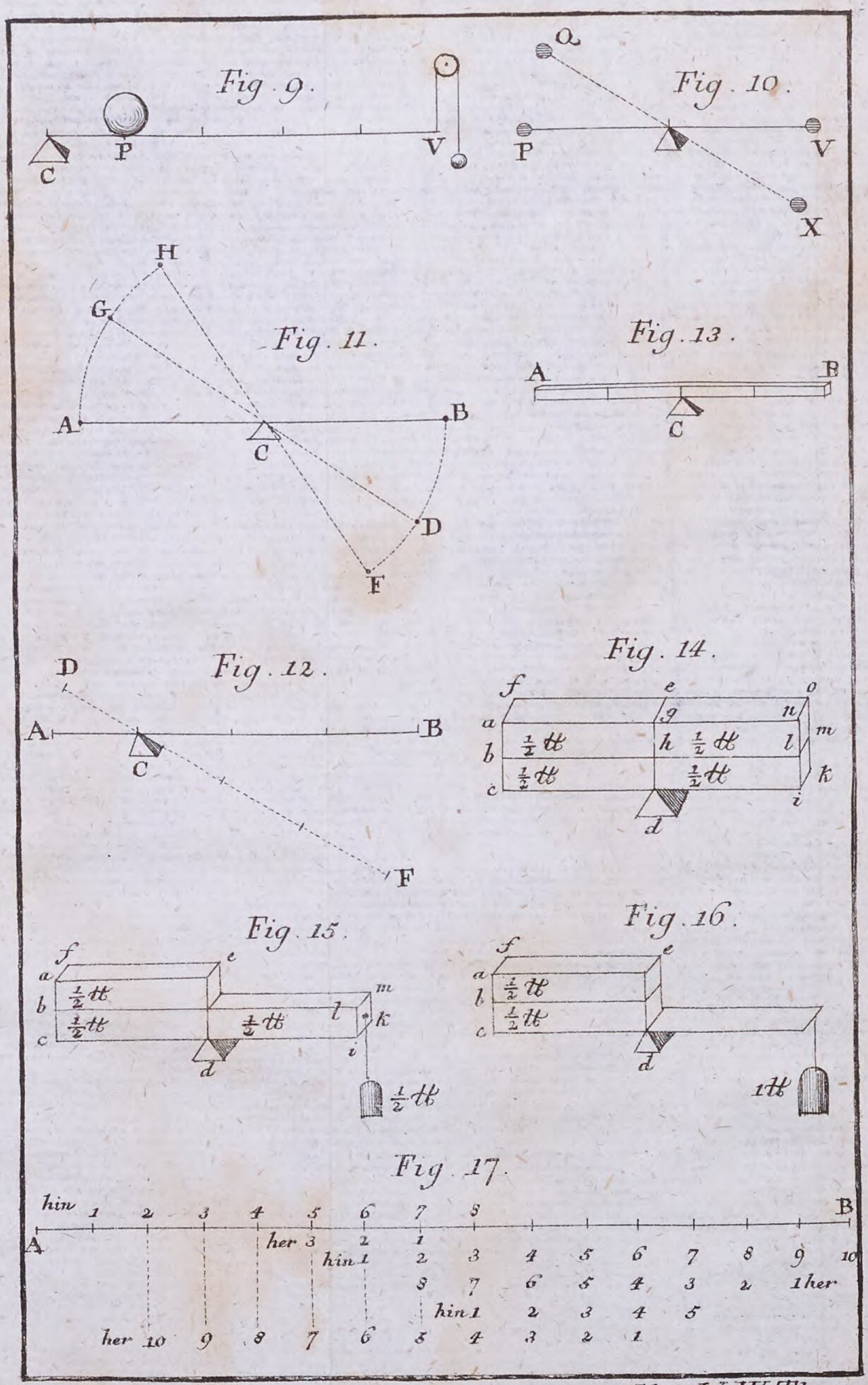


Fig. 9.
C
P
V
Fig. 10.
Q
P
V
X
Fig. 11.
H
G
A
C
B
D
F
Fig. 12.
D
A
C
B
F
Fig. 13.
A
B
C
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
hin
her
A
B

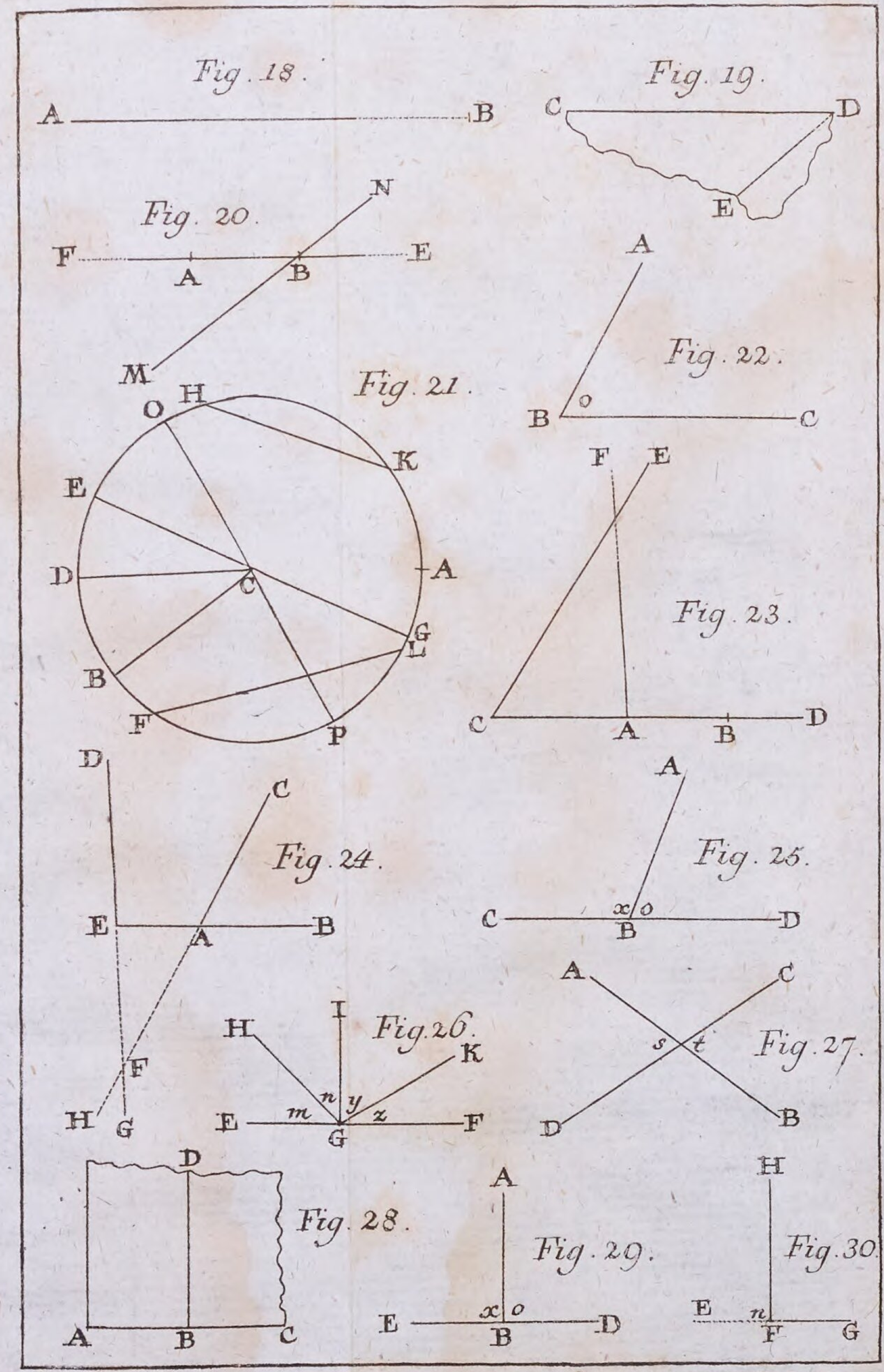


Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30

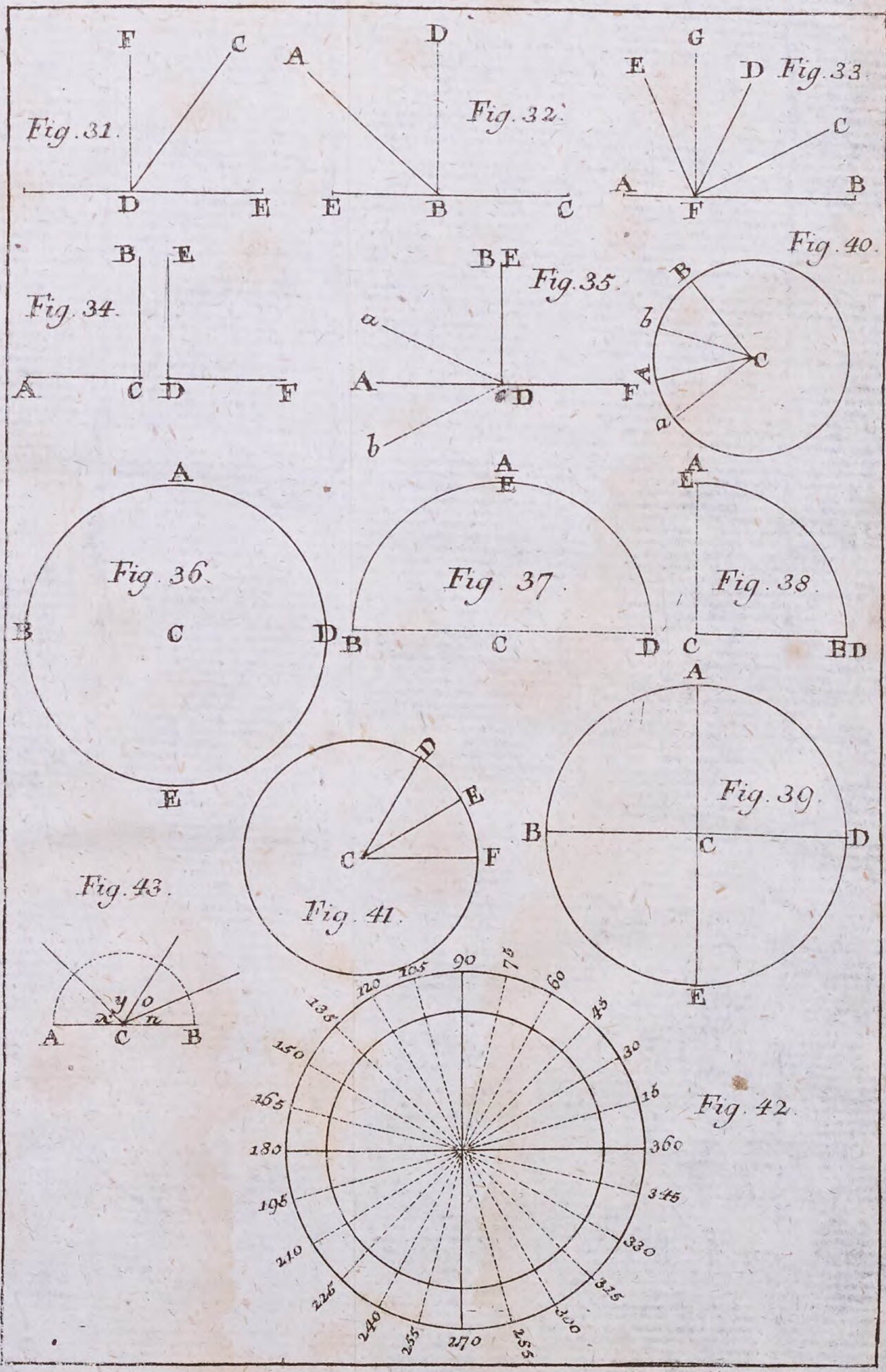


Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.

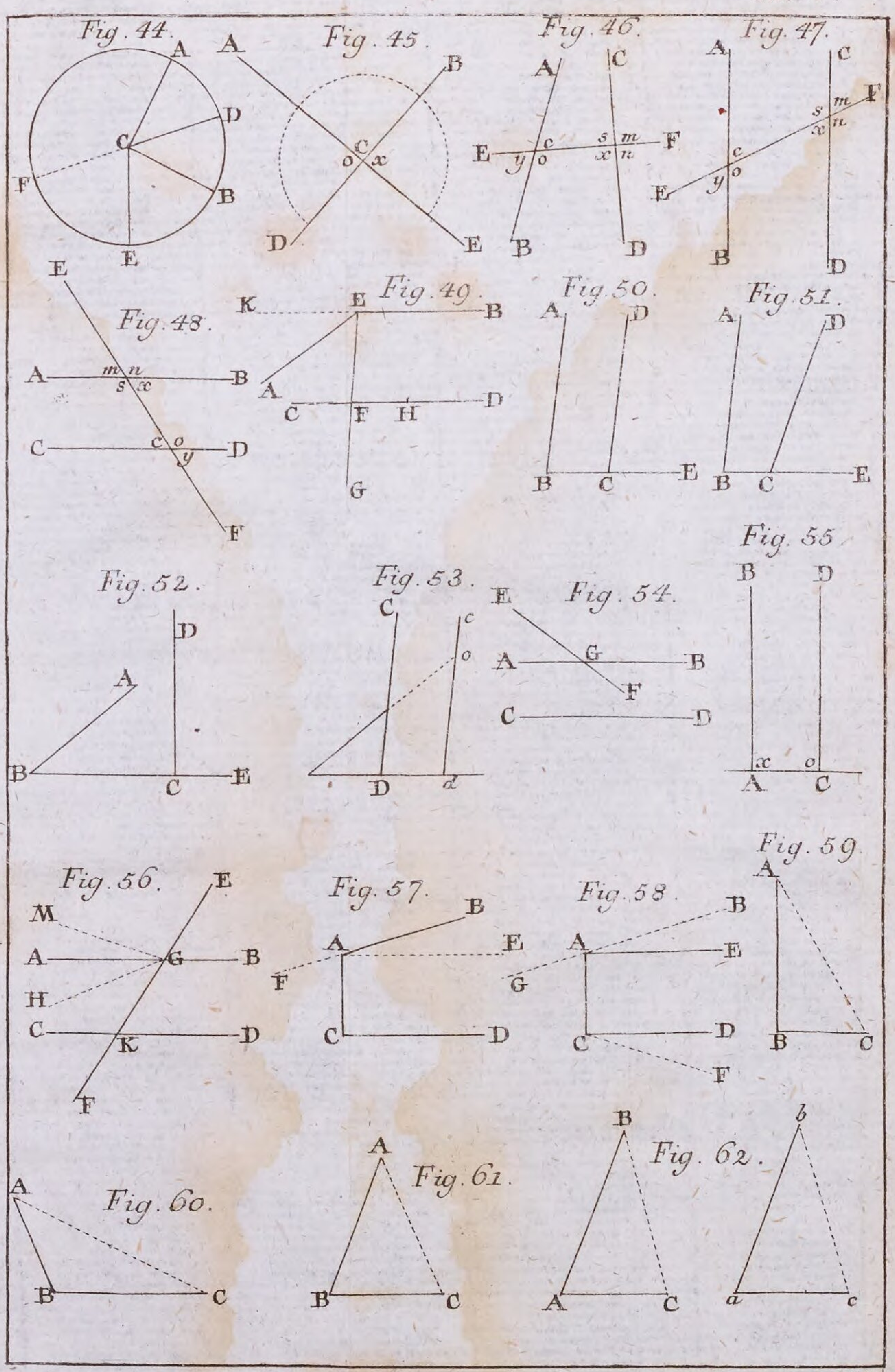


Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.

Tab. VI.

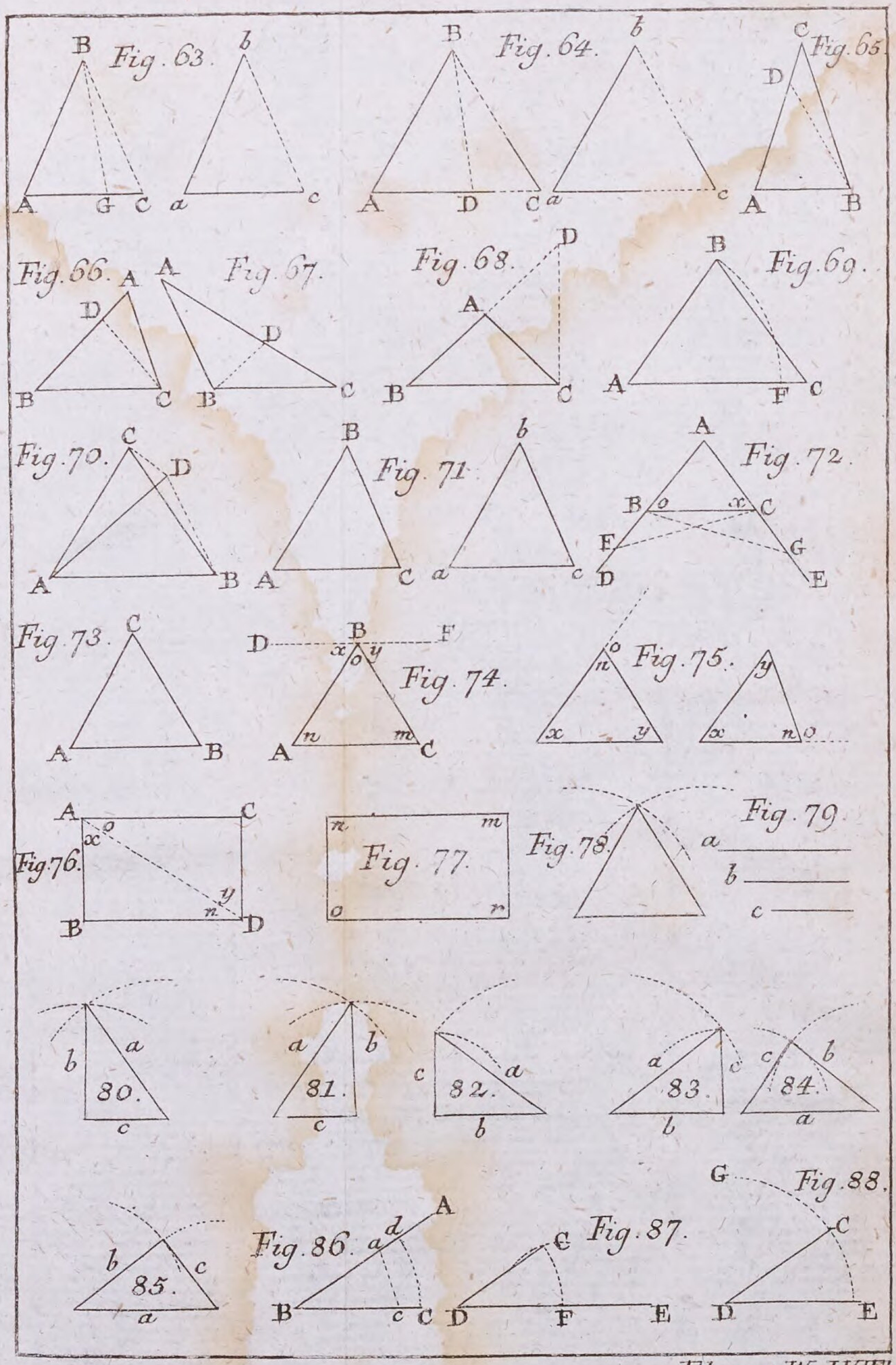


Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.

Tab. VII.

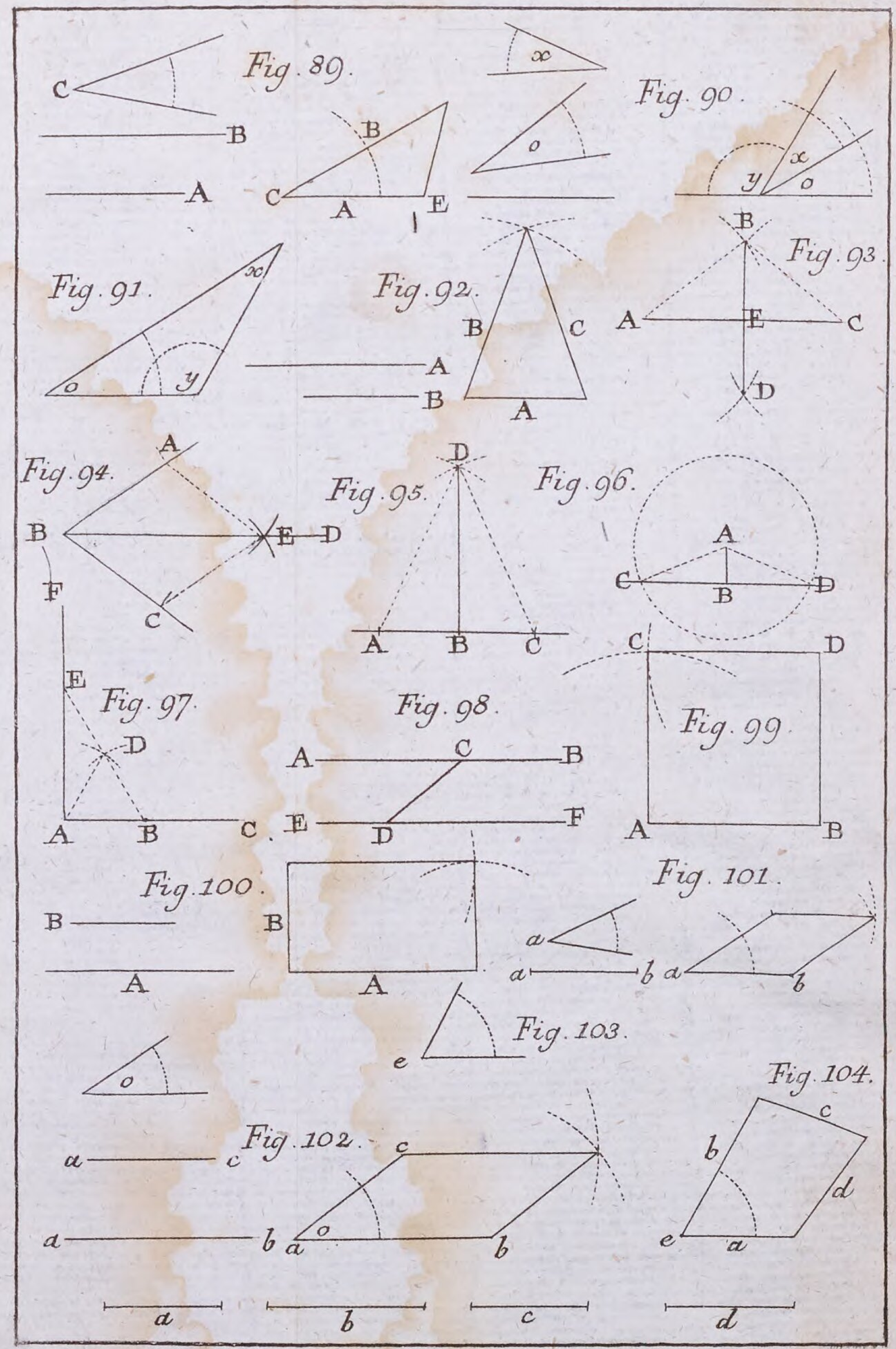


Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schütz, Christian Gottfried, 1747-1832

Neues Elementarwerk für die niedern Klassen lateinischer Schulen und Gymnasien Nach einem zusammenhängenden und auf die Lesung klassischer Autoren in den obern Klassen, wie auch auf die übrigen Vorerkenntnisse kü nftiger Studirenden gründlich vorbereitenden Plane
Bd.: 4

Halle 1780

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Bild 582 -4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11234815-1
VD18 80170722-001